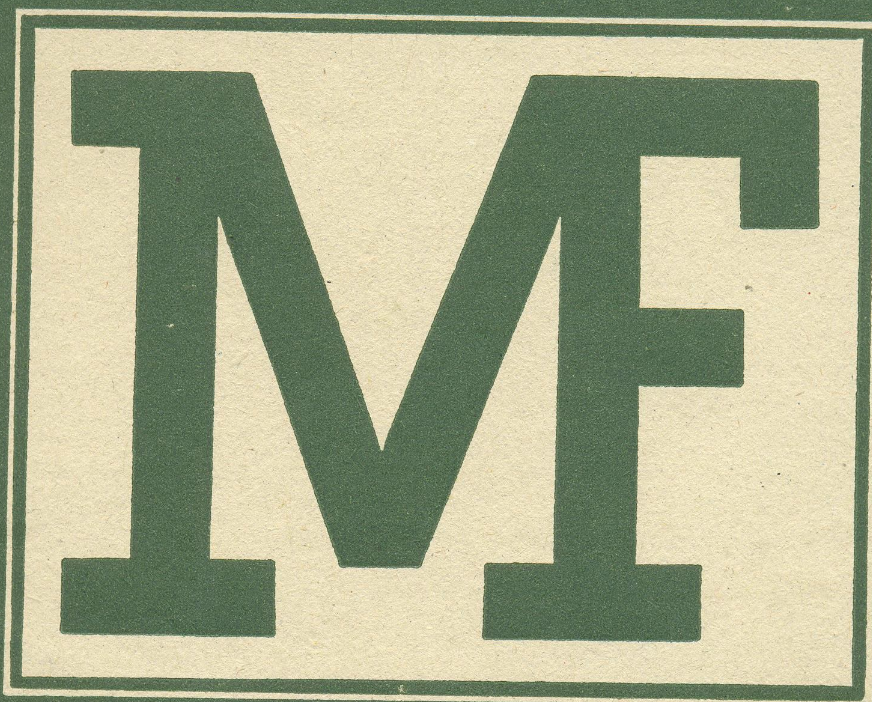
YU ISSN 0543-0038



MATEMATIČKO FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

2
153

GOD. XXXVIII ZAGREB 1987–88

»MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST« za učenike srednjih škola izlazi u četiri broja tokom školske godine.

Pojedini se broj prodaje po 300 dinara. Pretplata za 4 broja iznosi 1000 dinara; za inozemstvo dvostruko.

Adresa lista je: »Matematičko-fizički list, Ilica 16/III, 41001 Zagreb, pošt. pretinac 258« Tel.: (041) 425-288. Uplate se vrše na čekovni žiro-račun:

Društvo matematičara i fizičara Zagreb br. 30102-678-4202

Na uplatnici kao svrhu uplate valja *bezuvjetno naznačiti* »Za Mat. fiz. list«!

SADRŽAJ

Ovaj list oslobođen je plaćanja poreza na promet proizvoda. (Mišljenje Republičkog sekretarijata za prosvjetu, kulturu i fizičku kulturu SRH br. 2591/-1973. od 2. II 1973.)

Tisak Grafičkog zavoda Hrvatske, Zagreb, Frankopanska 26

SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA JUGOSLAVIJE

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

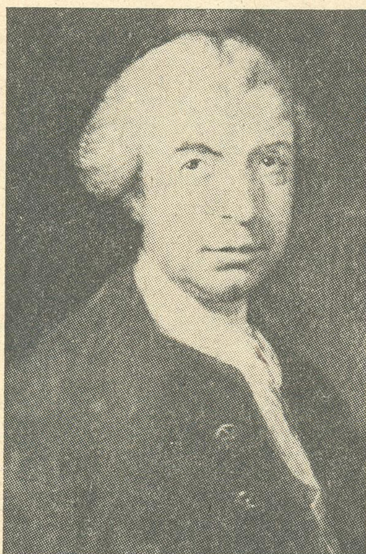
IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA SRH

GOD. XXXVIII BROJ 2 | ZAGREB | ŠKOL. GOD. 1987. — 1988.

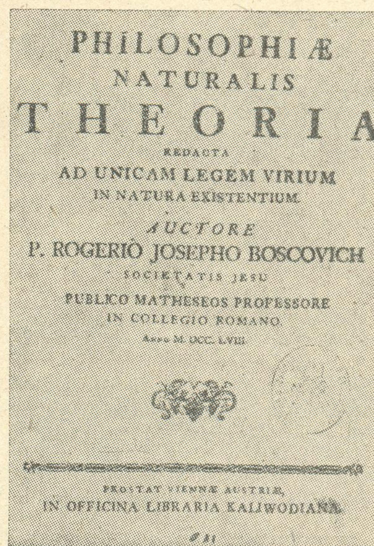
Ruđer Bošković

ŽARKO DADIĆ, Zagreb

Ove 1987. godine navršilo se dvije stotine godina od smrti najvećeg hrvatskog znanstvenika *Ruđera Boškovića.* Tom prilikom su održana dva međunarodna skupa posvećena njegovu životu i radu i to prvi u Milanu u mjesecu rujnu i drugi u Dubrovniku u mjesecu listopadu. Održat će se ove godine u prosincu još jedan međunarodni skup o Ruđeru Boškoviću u Parizu. Bošković je imao veliku ulogu u razvitku mnogih područja znanosti u 18. stoljeću, osobito u matematici, fizici i astronomiji. Poznat je posebno po svojoj teoriji strukture tvari.



Portret *Ruđera Boškovića* koji je izradio engleski slikar *Pine*



PHILOSOPHIÆ NATURALIS THEORIA REDACTA AD UNICAM LEGEM VIRIUM IN NATURA EXISTENTIUM AUCTORE P. ROGERIO JOSEPHO BOSCOVICH SOCIETATIS JESU PUBLICO MATHESEOS PROFESSORE IN COLLEGIO ROMANO Anno M. DCC. LVIII

PROSTAT VIENNÆ AUSTRIÆ, IN OFFICINA LIBRARIA KALIWODIANA.

Naslovna stranica glavnog Boškovićeva djela

Bošković je rođen 18. svibnja 1711. u Dubrovniku, gdje je započeo školovanje, a nastavio ga u Rimu u Collegium Romanum. Vrlo brzo je preuzeo katedru matematike na tom kolegiju. Već od godine 1736. počeo je objavljivati rasprave iz matematike, fizike i astronomije, koje su po običaju isusovačkog reda kojemu je kolegij pripadao, branili studenti. Gotovo sve te rasprave značile su početak kasnijih Boškovićevih istraživanja, a bile su jasno karakterizirane njutonizmom.

Već u prvim raspravama pokazao je interes za problem oblika i veličine Zemlje, kao i nejednakosti sile teže. Da bi riješio taj problem htio je dobiti mjerenja meridijanskog stupnja na različitim mjestima Zemlje. Zato mu je papa Benedikt XIV. povjerio da taj posao obavi u Papinskoj

državi. Rezultat je bilo djelo »De litteraria expeditione« koje je objavio godine 1755. u Rimu zajedno s isusovcem *le Maireom.*

Malo nakon toga godine 1757. došlo je do prijepora između republike Lucce i vojvodine Toscane zbog nekih voda koje je imao riješiti austrijski car. Lucca je tražila da je Bošković zastupa u Beču. Boravak u Beču je iskoristio da dovrši svoje veliko djelo *»Philosophiae naturalis theoria«* koje je objavljeno prvi put u Beču godine 1758. a u kojem je Bošković izložio sustavno svoju teoriju strukture tvari. Nakon dovršenja poslova u Beču Bošković se nije želio vratiti u Rim, jer su u Kolegiju loše gledali na Boškovićeve njutonističke ideje. Zato je otišao na put po Italiji, Francuskoj i Engleskoj gdje je želio upoznati velike znanstvenike toga doba. Nakon toga je krenuo u Carigrad da promatra prolaz Venere ispred Sunca, što je smatrao važnim znanstvenim problemom. Nažalost zakasnio je na taj događaj. Vraćao se iz Carigrada preko Bugarske i Poljske i taj put opisao u svom Dnevniku koji je bio objavljen godine 1784. Nakon toga se vratio u Italiju i prihvatio mjesto profesora matematike na Sveučilištu u Paviji godine 1763.

Godine 1764. povjereno je Boškoviću da izvrši sve pripreme za osnutak zvjezdarnice u Breri kod Milana. Bošković je izradio sve potrebne nacrte i predvidio cjelokupnu astronomsku opremu koja je bila u skladu sa svim najmodernijim znanstvenim shvaćanjima toga doba. Tu je Bošković primjenjivao svoje metode u praktičnoj astronomiji, baveći se osobito ispitivanjem pogrešaka astronomskih instrumenata. Ali, Boškovićeve vrlo široke ideje nisu rado gledali u Breri. Zbog toga je došlo do nekih sukoba, pa je Bošković napustio zvjezdarnicu, a i mjesto profesora na Milanskom sveučilištu gdje je tada predavao. Kad je bio ukinut isusovački red godine 1773, kojemu je Bošković pripadao, došao je on u vrlo tešku materijalnu situaciju. Međutim, tada je dobio poziv iz Pariza da prihvati mjesto upravitelja optike za mornaricu. Bošković je poziv prihvatio i tako je počelo novo razdoblje njegova života i rada u Francuskoj. Mjesto upravitelja optike za mornaricu dobio je definitivno godine 1774., a zadatak mu je bio čisto istraživački. Bošković je trebao prvenstveno usavršavati teoriju i olakšavati praksu akromatičnih dalekozora. Ali, on je u Parizu razvio i mnoge druge znanstvene aktivnosti, osobito u obliku veza s Akademijom. U Parizu je imao mnogo prijatelja među znanstvenicima, među kojima posebno treba spomenuti *Lalandea, Clairauta, Messiera* i *Méchaina.*

Ali, imao je tu i nekih neprilika, osobito u vezi s dva svoja otkrića: jedno se odnosilo na objektivni mikrometar, a drugo na metodu određivanja staza kometa. U prvoj stvari došlo je do prijepora čiji je prioritet otkrića, Boškovićev ili *Rochonov.* U drugoj stvari došlo je do nesporazuma između Boškovića i *Laplacea* u pogledu metode određivanja staza kometa. U isto doba je Bošković dovršavao svoje radove iz optike i astronomije, što je trebalo da predstavlja konačnu verziju njegovih istraživanja u tim područjima. Radi završavanja tih djela Bošković je tražio dvogodišnji dopust da bi ih u Italiji pripremio za tisak i objavio. Godine 1782. taj je dopust dobio, pa je otišao u Bessano, gdje su njegova djela izašla u pet velikih svezaka pod nazivom »Opera pertinentia ad opticam et astronomiam« godine 1785. Nakon njihova objavljivanja ostao je još u Italiji dobivši produljenje dopusta. Ali pretjeran rad, osobito na objavljivanju djela, narušilo je Boškovićevo zdravlje, pa je od komplikacija upale pluća umro 13. veljače 1787. u Milanu, gdje je i pokopan.

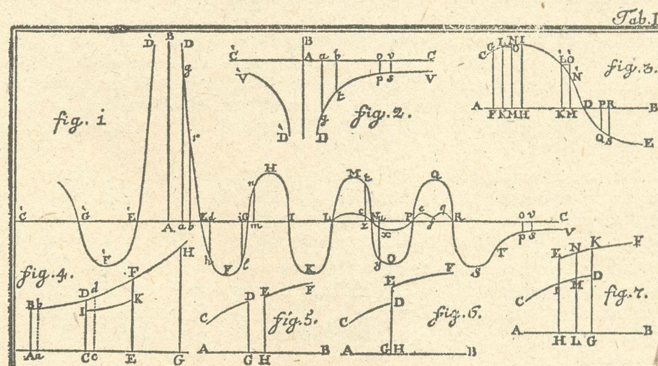
Bošković se bavio mnogim problemima znanosti. Gotovo je nemoguće pronaći neku znanstvenu aktivnost kojom se nije bavio. Istraživao je matematiku, fiziku, astronomiju, geodeziju, statiku, bavio se filozofijom, arheologijom, diplomacijom, pjesništvom. I u svemu je dao vrijedne priloge i duboke ideje.

Najvažniji Boškovićev doprinos znanosti tiče se strukture tvari i pojma neprekinutosti koji je s tim u vezi. On je držao da se ništa u prirodi ne događa skokom, naime da se u prirodi sve događa neprekinuto. U 18. stoljeću bilo je i kritika tog zakona, jer se nije mogao primijeniti na mnoge pojave. Tako je problem sudara dvaju tijela izazivao sumnju u njega, jer ako se sudare dva tijela različite brzine, onda se naglo a ne neprekinuto promijeni njihova brzina. Bošković je sudar tumačio drugačije, pa za njega nagla promjena brzine pri sudaru ne znači da ne vrijedi zakon neprekinutosti nego samo da ne postoji dodir među tijelima. Do dodira ne može doći, jer odbojna sila između tijela raste neograničeno kad se ona približavaju jedno drugom, a brzina se tada mora mijenjati neprekinuto. Bošković je ovdje spojio zakon neprekinutosti s *Newtonovom* idejom o odbojnim silama među česticama malih udaljenosti. Zbog postojanja odbojne sile u malim udaljenostima Bošković drži da su elementarne čestice točkaste, jer kad bi te čestice bile protežne morale bi se raspršiti, jer uslijed odbojnih sila ne bi se mogla držati na okupu nikakva ma kako mala protežna čestica.

Ako se dvije takve točke-čestice nađu u nekoj udaljenosti jedna od druge, onda je tom udaljenošću određena sila. Ona je u vrlo malim udaljenostima odbojna, a u vrlo velikim udaljenostima privlačna u skladu s Newtonovim zakonom gravitacije. Očito je da na nekoj udaljenosti sila mora prijeći od privlačne u odbojnu, jer je po Boškovićevu gledištu njezina promjena neprekinuta kao i svaka druga promjena u prirodi. U takvoj udaljenosti određenje neće biti ni za privlačenje, ni

za odbijanje. Međutim, Bošković je smatrao da takvih prijelaza ima više i da se time mogu dobro tumačiti sve različitosti i pojave u pirrodi. Te točke prijelaza Bošković naziva granice kohezije i nekohezije.

Kako u prostoru postoji mnogo čestica među kojima postoji određenje za privlačenje ili odbijanje, to će već za samo nekoliko njih postojati mnoštvo različitih slučajeva. Bošković u svojoj »Teoriji« pokazuje razne slučajeve i položaje nekoliko čestica, od kojih su mnogi vrlo važni. Osobito je važan slučaj triju čestica, od kojih su dvije međusobno udaljene za daljinu jedne granice kohezije od ishodišta, a treća čestica je na simetrali spojnice prve dvije. Za slučaj da je treća čestica od preostale dvije udaljena za udaljenost točke kohezije od ishodišta ona može opisati oko prve dvije stabilnu elipsu, tako da se može dobiti skup diskretnih elipsa po kojima se može gibati treća čestica.



Boškovićeve krivulje sile i drugi crteži iz njegove *Teorije*

Na temelju poredaja čestica i njihovih brzina, Bošković je tumačio različita svojstva tijela i različite prirodne pojave. Osobitu ulogu imaju granice kohezije i oscilacije oko točaka kohezije. Bošković je tumačio pojavu svjetlosti, topline, elektriciteta i magnetizma kao i kemijske pojave pomoću gibanja i položaja čestica materije i posebnih fluida.

Boškovićeva teorija objavljena je godine 1758. i u početku primljena je različito. Krajem 18. stoljeća ipak je bila zastupana u velikom broju udžbenika iz fizike u raznim zemljama Evrope, tako da je krajem tog stoljeća, uz njutonizam, bila temelj nastave iz fizike. Najveći utjecaj imala je Boškovićeva teorija u Engleskoj i Škotskoj, gdje su je koristili mnogi profesori na sveučilištu u svojim predavanjima ne samo krajem 18. stoljeća nego i početkom 19. stoljeća. Posebno je važan utjecaj koji je izvršila Boškovićeva teorija na *Faradaya* koji ju je transformirao tako da je uveo pojam polja sila. Teoriju polja kasnije je razvio *Maxwell*, pa je tako Boškovićeva teorija bitno utjecala na uvođenje tog važnog fizikalnog pojma.

Sredinom 19. stoljeća mnogi su fizičari pod Boškovićevim utjecajem držali da je sila između bliskih čestica odbojna, a između udaljenijih privlačna. Pored mnogo drugih tako je mislio i Maxwell i to je više puta isticao. I *William Thomson — Kelvin* je šezdesetih godina 19. stoljeća zastupao Boškovićevu teoriju, pa ju je potkraj stoljeća izričito doveo u vezu sa svojim istraživanjima. Kad je koncem 19. stoljeća otkriven elektron, postavilo se pitanje kako je on povezan s ostalim dijelovima atoma. Kelvin je početkom 20. stoljeća više puta taj problem rješavao pomoću Boškovćeve teorije. Tih istih godina primijenio je Boškovićevu teoriju za objašnjenje strukture atoma i *Joseph John Thomson.* On je tada na temelju Boškovićeve teorije pretpostavio da postoje samo neke staze po kojima će se gibati elektroni oko jezgre. Preko Thomsona je Boškovićeva ideja ušla u suvremenu fiziku.

Najveću aktivnost u području praktične astronomije pokazao je Bošković onda kad je utemeljio zvjezdarnicu u Breri i kad je na njoj radio. Bošković je smatrao da je najvažniji zadatak astronoma verifikacija astronomskih instrumenata, jer o tome ovise svi rezultati. Zato je vodio brigu o pogreškama i otklanjao ih ne samo praktično nego i teoretski. I lošija sprava je za Boškovića dobra ako se samo zna kakve su njezine mogućnosti i u kojim granicama se kreće pogreška. Tim svojim istraživanjima Bošković je postavio temelj nove praktične astronomije.

U teorijskoj astronomiji Bošković je dao svoje metode određivanja staza kometa, metodu određivanja staze planeta Urana, metode određivanja eliptičnih staza ako se ne udaljuju mnogo od paraboličnih staza, zatim teoriju perturbacija planeta Jupitera i Saturna. Mnoge su bile važna spona za postavljanje novih metoda početkom 19. stoljeća.

Kao i u drugim područjima tako su i u optici temeljni pojmovi i njihova kritika bili prvi kojima se Bošković bavio. Razmatrajući tvrdnju o pravocrtnom širenju svjetlosti zaključio je da se ni na koji način ne može dokazati da se svjetlost širi pravocrtno u beskrajnim prostorima svemira gdje neke sile mogu čestice svjetlosti skrenuti s njihova puta. Tu su izvanredno važne rasprave o gustoći svjetlosti, budući da Bošković izgleda među prvima ili čak prvi formulira zakon rasvjete. Kasnije se Bošković usmjerio više na istraživanje leća i njihovih pogrešaka. Stalno zanimanje za poboljšanje leća i optičkih sprava dovelo je Boškovića i na istraživanje novog optičkog mikrometra. Za tu je svrhu upotrijebio svojstva dvoloma gorskog kristala.

Bošković se jako zanimao i za probleme oblika i veličine Zemlje. On se osobito bavi ravnotežom tekućine koja rotira oko svoje osi i oblikom Zemlje na temelju mjerenja meridijanskih stupnjeva i duljine sekundarnog njihala. On geometrijskom metodom dokazuje da oblik rotirajuće tekućine mora biti elipsoid spljošten na polovima što je već bio dokazao i *Mac Laurin*. Dalje je Bošković dokazao da dva pravocrtna kanala koji izlaze iz bilo koje točke tekućine i završavaju na površini moraju biti u ravnoteži. A tada je sila teže na površini Zemlje okomita na samu površinu. Iz toga odmah proizlazi Boškovićeva definicija Zemljine površine. On je definira kao površinu koja je na svakom mjestu okomita na smjer sile teže u njemu. Ta površina, kako je Bošković već više puta isticao, ovisi o raspodjeli masa u unutrašnjosti Zemlje, ali i o konfiguraciji njezine vidljive površine.

U matematici je Bošković došao do više važnih zaključaka, ali je najvažniji od sviju njegov zaključak da realni brojevi čine kontinuum. U njegovo vrijeme se držalo da su samo geometrijski objekti neprekinuti. Boškovićevo proširenje pojma neprekinutosti i na brojeve stoga je značilo ogroman napredak. Važna je i njegova teorija presjeka stošca u kojoj je uveo mnoge nove poglede.

Njegova shvaćanja prostora bila su također nova u njegovo vrijeme. On je smatrao da apsolutni prostor ne možemo spoznati ni na koji način, a da možemo govoriti samo o relativnom prostoru u kojem se nalaze sve zvijezde. Smatrao je također da je nemoguće spoznati ni apsolutno gibanje, a ni vrijeme. Svojim pogledima u tom pogledu on postaje važan prethodnik modernih relativističkih pogleda.

U građevinarstvu se zalagao za uvođenje matematičkog proračuna, što je tada bila novost, a značilo je i novo razdoblje u tom području.

Problemi koji su ovdje navedeni nisu svi kojima se Bošković bavio, ali već i oni pokazuju svu širinu njegovih pogleda i dubinu njegovih znanstvenih rezultata.

Kada će četvorougao biti trapez?

DRAGOLJUB S. JOVIĆ, Zaječar

Po definiciji, trapez je četvorougao sa jednim parom paralelnih stranica. Otuda proizlazi da trapez pripada klasi konveksnih četvorouglova ravni E^2.

Prema tome, u ravni E^2 konveksni četvorougao biće trapez, ako posjeduje jedan par paralelnih stranica.

Sem ovog definicionog uslova, postoje i drugi uslovi pod kojima će konveksni četvorougao u ravni E^2 biti trapez te iste ravni E^2. Te uslovc daju sledeće teoreme:

Teorema 1.

U ravni E^2 konveksni četvorougao $ABCD$ biće trapez, ako i samo ako je duž MN, koja spaja središta M i N njegovih naspramnih stranica AD i BC, jednaka poluzbiru ostalih dveju stranica AB i CD datog konveksnog četvorougla $ABCD$, tj. ako i samo ako je:

$$MN = \frac{1}{2}(AB + CD),$$

pri čmu je $AM = MD$ i $BN = NC$.

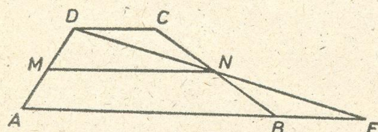
Dokaz:

1) *Uslov teoreme je potreban.*

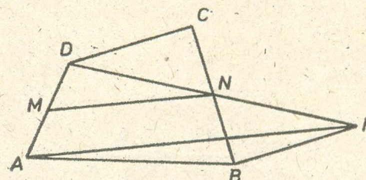
Neka su u ravni E^2 tačke M i N središta krakova AD i BC trapeza $ABCD$ u kome je $AB \parallel CD$, (sl. 1).

Treba dokazati da je $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

U tom cilju produžimo duž DN preko tačke N do preseka F sa produženjem stranice AB datog trapeza $ABCD$. Tada je $\sphericalangle BNF = \sphericalangle CND$ (kao unakrsni), $\sphericalangle FBN = \sphericalangle NCD$ (kao naizmenični) i $BN = NC$, pa je zato $\triangle BFN \cong \triangle NCD$, odakle, pak, sledi da je $BF = CD$ i $FN = ND$.



Sl. 1.



Sl. 2.

S druge strane, kako je $AM = MD$ i $FN = ND$, proizlazi da je MN središna duž trougla AFD, pa je stoga:

$$MN = \frac{1}{2} AF = \frac{1}{2}(AB + BF) = \frac{1}{2}(AB + CD),$$

što je u ovom delu teoreme i trebalo dokazati.

2) *Uslov teoreme je dovoljan.*

Neka su u ravni E^2 tačke M i N središta naspramnih stranica AD i BC konveksnog četvorougla $ABCD$, (sl. 2), takve da je:

$$MN = \frac{1}{2}(AB + CD). \qquad (1)$$

Treba dokazati da je dati konveksni četvorougao $ABCD$ trapez.

U tom cilju produžimo duž DN preko tačke N za $NF = ND$, a zatim tačku F spojimo sa tačkama A i B. Tada je $BN = NC$, $NF = ND$ i $\sphericalangle BNF = \sphericalangle CND$ (kao unakrsni), pa je zato $\triangle BFN \cong \triangle NCD$, odakle, pak, sledi da je $BF = CD$ i $\sphericalangle BFN = \sphericalangle CDN$.

Međutim, kako su uglovi BFN i CDN naizmenični po položaju, onda zbog jednakosti ovih uglova proizlazi da je $BF \parallel CD$.

S druge strane, kako je $AM = MD$ i $FN = ND$, sledi da je MN središna duž trougla OFD, pa je stoga

$$MN = \frac{1}{2} AF. \qquad (2)$$

Iz jednakosti (1) i (2) proizlazi da je $AB + CD = AF$. Međutim, kako je $CD = BF$, poslednja jednakost postaje:

$$AB + BF = AF.$$

To znači da su tačke A, B i F kolinearne, pa zbog $BF \parallel CD$, sledi da je $AB \parallel CD$, odakle, pak, neposredno proizlazi da je dati konveksni četvorougao $ABCD$ trapez, što je u ovom delu teoreme i trebalo dokazati.

Time je ova teorema u potpunosti dokazana.

Teorema 2.

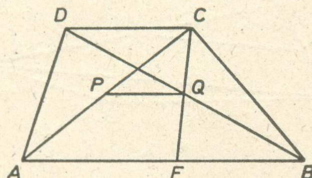
U ravni E^2 konveksni četvorougao $ABCD$ biće trapez, ako i samo ako je duž PQ, koja spaja središta P i Q njegovih dijagonala AC i BD, jednaka polurazlici stranica AB i CD datog konveksnog četvorougla $ABCD$, tj. ako i samo ako je $PQ = \frac{1}{2}(AB - CD)$, pri čemu je $AP = PC$ i $BQ = QD$.

Dokaz:

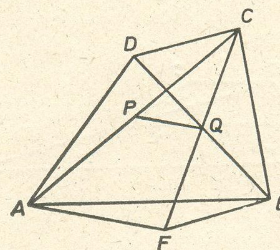
1) *Uslov teoreme je potreban.*

Neka su u ravni E^2 tačke P i Q središta dijagonala AC i BD trapeza $ABCD$ u kome je $AB \parallel CD$, (sl. 3).

Treba dokazati da je $PQ = \frac{1}{2}(AB - CD)$.



Sl. 3.



Sl. 4.

U tom cilju produžimo duž CQ preko tačke Q do preseka F sa stranicom AB datog trapeza $ABCD$. Tada je $\measuredangle BQF = \measuredangle CQD$ (kao unakrsni), $\measuredangle FBQ = \measuredangle CDQ$ (kao naizmenični) i $BQ = QD$, pa je zato $\triangle FBQ \cong \triangle CDQ$, odakle, pak, sledi da je $FB = CD$ i $FQ = QC$.

S druge strane, kako je $AP = PC$ i $FQ = QC$, proizlazi da je PQ središna duž trougla AFC, pa je stoga:

$$PQ = \frac{1}{2} AF = \frac{1}{2}(AB - FB) = \frac{1}{2}(AB - CD),$$

što je u ovom delu teoreme i trebalo dokazati.

2) *Uslov teoreme je dovoljan.*

Neka su u ravni E^2 tačke P i Q središta dijagonala AC i BD konveksnog četvorougla $ABCD$ (sl. 4), takva da je:

$$PQ = \frac{1}{2}(AB - CD). \tag{3}$$

Treba dokazati da je dati konveksni četvorougao $ABCD$ trapez.

U tom cilju produžimo duž CQ preko tačke Q za $QF = CQ$, a zatim tačku F spojimo sa tačkama A i B. Tada je $\measuredangle BQF = \measuredangle CQD$ (kao unakrsni), $BQ = QD$ i $FQ = QC$, pa je zato $\triangle FBQ \cong \triangle CDQ$, odakle, pak, neposredno sledi da je $FB = CD$ i $\measuredangle FBQ = \measuredangle CDQ$.

Međutim, kako su uglovi FBQ i CDQ naizmenični po položaju, onda zbog jednakosti ovih uglova proizlazi da je $FB \parallel CD$.

S druge strane, kako je $AP = PC$ i $FQ = QC$, sledi da je PQ središna duž trougla AFC, pa je stoga:

$$PQ = \frac{1}{2} AF. \tag{4}$$

Iz jednakosti (3) i (4) proizlazi da je $AB - CD = AF$. Međutim, kako je $CD = FB$, poslednja jednakost postaje $AB - FB = AF$, odakle, pak, neposredno sledi da je:

$$AB = AF + FB.$$

To znači da su tačke A, B i F kolinearne, pa zbog $FB \parallel CD$, proizlazi da je $AB \parallel CD$, odakle, pak, neposredno sledi da je dati konveksni četvorougao $ABCD$ trapez, što je u ovom delu teoreme i trebalo dokazati.

Time je ova teorema u potpunosti dokazana.

Teorema 3.

U ravni E^2 konveksni četvorougao $ABCD$ biće trapez, ako i samo ako je $MP = NQ$, pri čemu su tačke M i N središta njegovih naspramnih stranica AD i BC, a P i Q presečne tačke duži MN sa dijagonalama AC i BD datog konveksnog četvorougla $ABCD$.

Dokaz:

1) *Uslov teoreme je potreban.*

Neka su ravni E^2 tačke M i N središta krakova AD i BC trapeza $ABCD$ (sl. 5), a P i Q presečne tačke duži MN sa dijagonalama AC i BD datog trapeza $ABCD$ u kome je $AB \parallel CD$. Treba dokazati da je $MP = NQ$.

I zaista, kako su po pretpostavci u ovom delu teoreme tačke M i N središta krakova AD i BC trapeza $ABCD$, sledi da je MN središna duž datog trapeza $ABCD$, pa je zato $MN \parallel AB \parallel CD$, odakle, pak, na osnovu Talesove teoreme sledi da je $\frac{AP}{PC} = \frac{AM}{MD} = 1$ i $\frac{BQ}{QD} = \frac{BN}{NC} = 1$, jer je po pretpostavci $AM = MD$ i $BN = NC$. Otuda proizlazi da je $AP = PC$ i $BQ = QD$.

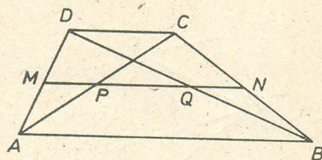
I sad, kako je $AM = MD$ i $AP = PC$, sledi da je MP središna duž trougla ACD, pa je stoga:

$$MP = \frac{1}{2} CD. \tag{5}$$

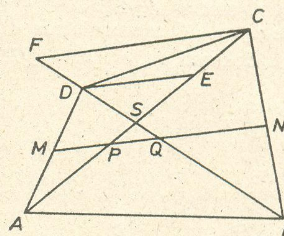
S druge strane, kako je $BN = NC$ i $BQ = QD$, proizlazi da je NQ središna duž trougla BCD, pa je zato:

$$NQ = \frac{1}{2} CD. \tag{6}$$

Neposredno iz jednakosti (5) i (6) sledi da je $MP = NQ$, što je u ovom delu teoreme i trebalo dokazati.



Sl. 5.



Sl. 6.

2) *Uslov teoreme je dovoljan.*

Neka su u ravni E^2 tačke M i N središta naspramnih stranica AD i BC konveksnog četvorougla $ABCD$, a P i Q presečne tačke duži MN sa dijagonalama AC i BD datog konveksnog četvorougla $ABCD$, takve da je $MP = QN$ (sl. 6).

Treba dokazati da je dati konveksni četvorougao $ABCD$ trapez u kome je $AB \parallel CD$.

U tom cilju postupićemo indirektno, tj. pretpostavićemo da nije $AB \parallel CD$. Ako je tako, onda nije ni $MN \parallel AB \parallel CD$, pa zato na pravama AC i BD postoje tačke E i F, različite od tačaka C i D, takve da je $DE \parallel MN$ i $CF \parallel MN$. Otuda, na osnovu Talesove teoreme, sledi da je $\frac{AP}{PE} = \frac{AM}{MD} = 1$ i $\frac{BQ}{QF} = \frac{BN}{NC} = 1$, jer je po pretpostavci $AM = MD$ i $BN = NC$. Odavde, dalje, proizlazi da je $AP = PE$ i $BQ = QF$.

I sad, kako je $AM = MD$ i $AP = PE$, sledi da je MP središna duž trougla ADE, pa je stoga:

$$MP = \frac{1}{2} DE. \tag{7}$$

S druge strane, kako je $BN = NC$ i $BQ = QF$, proizlazi da je NQ središna duž trougla BCF, pa je zato:

$$NQ = \frac{1}{2} CF. \tag{8}$$

Međutim, po pretpostavci u ovom delu teoreme je $MP = NQ$, odakle, pak, na osnovu jednakosti (7) i (8) sledi da je $DE = CF$, pri čemu je još $DE \parallel CF \parallel MN$.

Prema tome, naspramne stranice DE i CF četvorougla $DECF$ su paralelne i jednake među sobom, pa je zato četvorougao $DECF$ paralelogram. Međutim, ovo je nemoguće, jer se prave, koje sadrže naspramne stranice CE i DF četvorougla $DECF$ seku u tački S.

Dakle, naša pretpostavka da nije $AB \parallel CD$ dovodi do apsurda, da je četvorougao $DECF$ paralelogram, koji to nije. Dobijeni apsurd dokazuje da je $AB \parallel CD$, što je u ovom delu teoreme i trebalo dokazati.

Time je ova teorema u potpunosti dokazana.

Posledica

U ravni E^2 konveksni četvorougao $ABCD$ biće trapez, ako i samo ako je $MQ = NP$, pri čemu su M i N središta njegovih naspramnih stranica AD i BC, a P i Q presečne tačke duži MN sa dijagonalama AC i BD datog konveksnog četvorougla $ABCD$ (sl. 6).

Teorema 4.

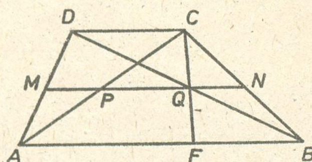
U ravni E^2 konveksni četvorougao $ABCD$ biće trapez, ako i samo ako je $PM = QN$, pri čemu su tačke P i Q središta njegovih dijagonala AC i BD, a M i N presečne tačke prave PQ sa stranicama AD i BC datog konveksnog četvorougla $ABCD$.

Dokaz:

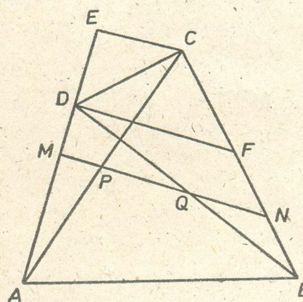
1) *Uslov teoreme je potreban.*

Neka su u ravni E^2 tačke P i Q središta dijagonala AC i BD trapeza $ABCD$, a M i N presečne tačke prave PQ sa stranicama AD i BC datog trapeza $ABCD$ u kome je $AB \parallel CD$, (sl. 7).

Treba dokazati da je $PM = QN$.



Sl. 7.



Sl. 8.

U tom cilju produžimo duž CQ preko tačke Q do preseka F sa stranicom AB datog trapeza $ABCD$. Tada je $\sphericalangle BQF = \sphericalangle CQD$ (kao unakrsni), $\sphericalangle FBQ = \sphericalangle CDQ$ (kao naizmenični) i $BQ = QD$ (po pretpostavci), pa je zato $\triangle FBQ \cong \triangle CDQ$, odakle, pak, sledi da je $FQ = QC$.

I sad, kako je $AP = PC$ (po pretpostavci) i $PQ = QC$, proizlazi da je PQ središna duž trougla AFC, pa je stoga $PQ \parallel AF$, tj. $MN \parallel AB$, odakle, pak, na osnovu Talesove teoreme sledi da je $\frac{AM}{MD} = \frac{AP}{PC} = 1$ i $\frac{BN}{NC} = \frac{BQ}{QD} = 1$, jer je, po pretpostavci, $AP = PC$ i $BQ = QD$. Odavde, dalje, sledi da je $AM = MD$ i $BN = NC$.

Budući da je $AM = MD$ i $AP = PC$, proizlazi da je MP središna duž trougla ACD, pa je zato:

$$MP = \frac{1}{2} CD. \tag{9}$$

S druge strane, kako je $BN = NC$ i $BQ = QD$, sledi da je QN središna duž trougla BCD, pa je stoga:

$$QN = \frac{1}{2} CD. \tag{10}$$

Neposredno iz jednakosti (9) i (10) proizlazi da je $MP = QN$, što je u ovom delu teoreme i trebalo dokazati.

2) *Uslov teoreme je dovoljan.*

Neka su u ravni E^2 tačke P i Q središta dijagonala AC i BD konveksnog četvorougla $ABCD$, a M i N presečne tačke prave PQ sa stranicama AD i BC datog konveksnog četvorougla $ABCD$, takve da je $PM = QN$ (sl. 8).

Treba dokazati da je dati konveksni četvorougao $ABCD$ trapez u kome je $AB \parallel CD$.

U tom cilju postupićemo indirektno, tj. pretpostavićemo da nije $AB \parallel CD$. Ako je tako, onda nije ni $MN \parallel AB \parallel CD$, pa zato na pravama AD i BC postoje tačke E i F, različite od tačaka D i C, takve da je $CE \parallel MN$ i $DF \parallel MN$. Otuda, na osnovu Talesove teoreme, sledi da je $\frac{AM}{ME} = \frac{AP}{PC} = 1$ i $\frac{BN}{NF} = \frac{BQ}{QD} = 1$, jer je po pretpostavci $AP = PC$ i $BQ = QD$. Odavde, dalje, proizlazi da je $AM = ME$ i $BN = NF$.

I sad, kako je $AM = ME$ i $AP = PC$, sledi da je MP središna duž trougla ACE, pa je stoga:

$$PM = \frac{1}{2} CE. \tag{11}$$

S druge strane, kako je $BN = NF$ i $BQ = QD$, proizlazi da je QN središna duž trougla BFD, pa je zato:

$$QN = \frac{1}{2} DF. \tag{12}$$

Međutim, po pretpostavci u ovom delu teoreme je $PM = QN$, odakle, pak, na osnovu jednakosti (11) i (12), sledi da je $CE = DF$, pri čemu je još $CE \parallel DF \parallel MN$.

Prema tome, naspramne stranice CE i DF četvorougla $DFCE$ su paralelne i jednake među sobom, pa je zato četvorougao $DFCE$ paralelogram. Međutim, ovo je nemoguće, jer se prave, koje sadrže naspramne stranice DE i FC četvorougla $DFCE$ seku.

Dakle, naša pretpostavka da nije $AB \parallel CD$ dovodi do apsurda, da je četvorougao $DFCE$ paralelogram, koji to nije. Dobijeni apsurd dokazuje da je $AB \parallel CD$, što je u ovom delu teoreme i trebalo dokazati.

Time je ova teorema u potpunosti dokazana.

Posledica

U ravni E^2 konveksni četvorougao $ABCD$ biće trapez, ako i samo ako je $MQ = PN$ pri čemu su tačke P i Q središta njegovih dijagonala AC i BD, a M i N presečne tačke prave PQ sa naspramnim stranicama AD i BC datog konveksnog četvorougla $ABCD$ (sl. 8).

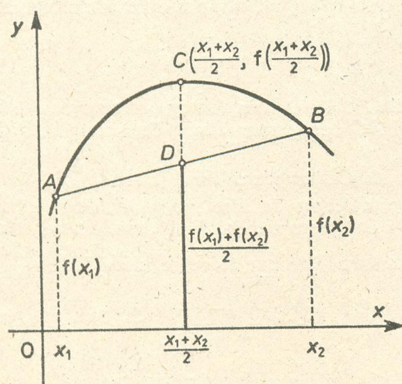
Konveksnost i konkavnost grafika funkcije

dr SVETOZAR VUKADINOVIĆ, Beograd

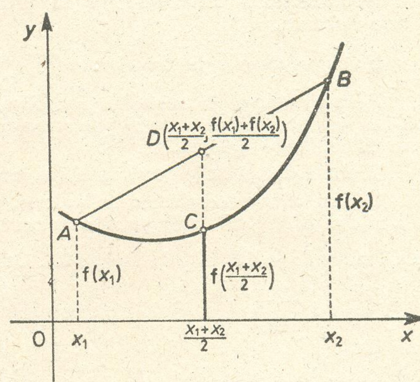
Grafik funkcije $y = f(x)$ u oblasti definisanosti može da bude konveksan (konkavan nadole, sl. 1) ili konkavan (konkavan nagore, sl. 2).

Ako spojimo dve proizvoljne tačke $A[x_1, f(x_1)]$ i $B[x_2, f(x_2)]$ konveksnog luka krive $y = f(x)$, onda je deo tog luka između tačaka A i B — iznad tetive AB. Znači, kod konveksnog luka ordinata proizvoljne tačke luka, izabrane između tačaka A i B, uvek će biti veća od ordinate tačke tetive sa istom apscisom. Ako izaberemo tačke na luku (C) i tetivi (D) sa apscisom $\frac{x_1 + x_2}{2}$, onda je ordinata tačke konveksnog luka $y_C = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ veća od ordinate tačke tetive $y_D = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$, tj. tada je ispunjeno

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$



Sl. 1.



Sl. 2.

ili

$$d = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} - f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < 0. \tag{1}$$

Ako spojimo dve proizvoljne tačke A i B konkavnog luka krive $y = f(x)$, onda je deo tog luka između tačaka A i B — ispod tetive AB. Znači, kod konkavnog luka ordinata proizvoljne tačke luka, izabrane između tačaka A i B, uvek će biti manja od ordinate tačke tetive sa istom apscisom. Ako i ovde izaberemo tačke na luku (C) i tetivi (D) sa apscisom $\frac{x_1 + x_2}{2}$, onda je ordinata tačke konkavnog luka $y_C = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ manja od ordinate tačke tetive $y_D = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$, tj. tada je ispunjeno

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

ili

$$d = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} - f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > 0. \tag{2}$$

Kao što vidimo, da bismo utvrdili da li je posmatrani luk krive konveksan ili konkavan potrebno je ispitati znak razlike d, pa ako je ta razlika negativna, onda je luk krive konveksan, a ako je pozitivna, onda je luk krive konkavan.

Tačka u kojoj kriva prelazi iz konveksnosti u konkavnost (ili obrnuto) naziva se prevojna tačka krive (tačka infleksije).

Primer. 1. Ispitati za koje vrednosti x je kriva $y = x^3 - 4x$ konveksna, a za koje je konkavna. *Rešenje.* Formirajmo razliku

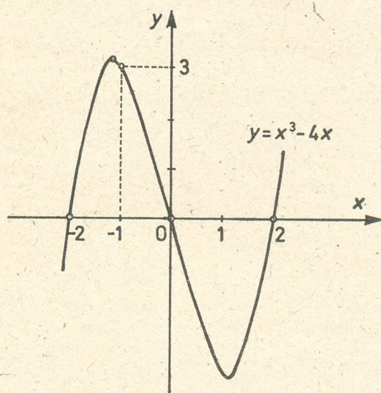
$$d = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} - f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{x_1^3 - 4x_1 + x_2^3 - 4x_2}{2} - \left[\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^3 - 4\frac{x_1 + x_2}{2}\right] =$$

$$= \frac{x_1^3 + x_2^3 - 4(x_1 + x_2)}{2} - \frac{(x_1 + x_2)^3}{8} + 2(x_1 + x_2) = \frac{3}{8}(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)^2.$$

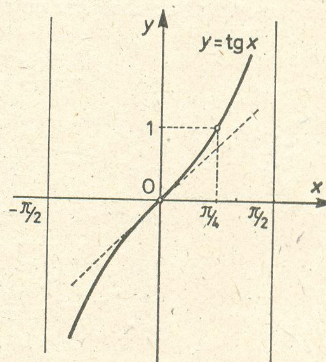
Ako su apscise x_1 i x_2 izabrane pozitivne ($0 < x_1 < x_2$), onda je $x_1 + x_2 > 0$, a kako je i $(x_1 - x_2)^2 > 0$, to je $d > 0$, pa je za $x > 0$ luk krive $y = f(x)$ konkavan. Za $x_1 < x_2 < 0$, razlika $d < 0$, pa je za $x < 0$ luk krive $y = f(x)$ konveksan. Prevojna tačka krive je koordinatni početak. Grafik funkcije $y = x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$ dat je na sl. 3.

Primer 2. Ispitati funkciju $y = \operatorname{tg} x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ u pogledu konveksnosti i konkavnosti.

Rešenje. Grafik funkcije $y = \operatorname{tg} x$ je simetričan u odnosu na koordinatni početak (neparna funkcija), i kako je za $x = 0$ i $\operatorname{tg} x = 0$, grafik prolazi kroz koordinatni početak (sl. 4). Zbog toga je dovoljno ispitati grafik funkcije samo za $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$. Ako se za ove vrednosti x pokaže, na primer, da je grafik konkavan, onda će za $-\frac{\pi}{2} < x \leqslant 0$ grafik biti konveksan (i obrnuto). Neka je, dakle, $x \geqslant 0$.



Sl. 3.



Sl. 4.

Uzmimo dve tačke x_1 i x_2 takve da je $0 \leqslant x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ i formirajmo razliku:

$$d = \frac{\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2}{2} - \operatorname{tg}\frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Radi jednostavnosti stavimo $\frac{x_1}{2} = \alpha$, $\frac{x_2}{2} = \beta$. Sledi

$$d = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\beta}{2} - \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{\operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta} - \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(1 - \operatorname{tg}^2 \beta)} - \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} =$$

$$= \frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)^2}{(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)(1 - \operatorname{tg}^2 \beta)(1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)}.$$

Kako je $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$, to je $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{4}$ i $0 \leqslant \beta < \frac{\pi}{4}$, pa je $0 \leqslant \operatorname{tg} \alpha < 1$, $0 \leqslant \operatorname{tg} \beta < 1$. Sledi da je $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta > 0$, $1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta > 0$, $1 - \operatorname{tg}^2 \alpha > 0$, $1 - \operatorname{tg}^2 \beta > 0$, $(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)^2 > 0$, pa je i $d > 0$. Na taj način pokazali smo da je

$$\frac{\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2}{2} - \operatorname{tg}\frac{x_1 + x_2}{2} > 0 \text{ za } 0 \leqslant x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2},$$

što znači da je za $x \geqslant 0$ kriva $y = \operatorname{tg} x$ konkavna. Zbog simetričnosti grafika funkcije u odnosu na koordinatni početak, sledi da je za $x \leqslant 0$ grafik funkcije konveksan. Koordinatni početak je prevojna tačka grafika funkcije $y = \operatorname{tg} x$.

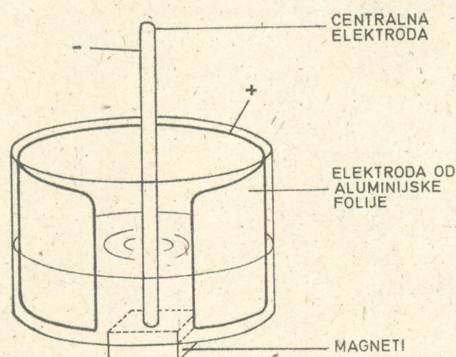
Vežbanja. Ispitati sledeće funkcije u pogledu konveksnosti i konkavnosti:

$y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \sqrt{x}$, $y = a^x$, $y = \sin x$, $y = \log_a x$ $(0 < a < 1,\ a > 1)$.

IZ MOJE RADIONICE I LABORATORIJA

Neobična vrtnja tekućine u magnetskom polju

Da bismo vidjeli tu neobičnu pojavu složimo uređaj prema slici.



Uz unutrašnju stijenu male staklene posudice (kristalizatora) položimo aluminijsku foliju koja će nam poslužiti kao elektroda. Drugu elektrodu, aluminijski štap dugačak otprilike 7 cm i promjera 0,5 cm, učvrstimo pomoću stative u sredinu posudice. U posudicu ulijemo elektrolit — otopinu sulfatne kiseline (H_2SO_4). Kad elektrode spojimo na izvor struje (akumulator 4 V ili baterija 9 V) elektrolitom će poteći struja što će se vidjeti po mjehurićima vodika koji se izlučuju uz centralnu elektrodu (katoda) i kisika koji se izlučuju uz površinu aluminijske folije (anoda).

Ako sada ispod centralne elektrode stavimo jači trajni magnet (nekoliko magneta od vrata za ormare) nakon nekoliko sekundi zapazit ćemo kako se čitav elektrolit okreće oko centralne elektrode. Pojavu rotacije tekućine još ćemo moći bolje promatrati ako površinu tekućine pospemo finim praškom od krede ili naprosto brašnom.

Zamijenimo li polaritet elektroda ili promijenimo smjer magnetskog polja, tekućina će rotirati u suprotnom smjeru.

Ako magnet udaljimo, rotacija prestaje.

Kako objasniti kružno gibanje tekućine?

Znamo da je na česticu naboja Q koja se giba brzinom v okomito na magnetsko polje indukcije B to polje djeluje Lorentzovom silom

$$F = B\,Q\,v.$$

Lorentzova sila uvijek je okomita na smjer brzine nabijene čestice i na smjer magnetskog polja, a smjer joj se određuje pravilom desne ruke.

U našem pokusu nabijene čestice su pozitivni (H_2^{++}) i negativni (SO_4^{--}) ioni koji se gibaju u električnom polju između elektroda. Dok nema magnetskog polja gibanje iona je radijalno zbog specifičnog oblika elektroda. Kad su se ioni našli u magnetskom polju okomitom na smjer njihove brzine, Lorentzova sila je promijenila smjer njihovog gibanja, tj. dala im je centripeltano ubrzanje. Pošto ioni imaju suprotni naboj (Q i $-Q$) to će i njihove brzine biti suprotnog smjera (v i $-v$) pa će Lorentzova sila sve ione zakretati u istom smjeru. Ioni sulfatne kiseline su s molekulama vode u elektrostatskom međudjelovanju pa zbog toga oni pri svom gibanju pokreću i ubrzavaju molekule vode i na taj način rotira čitava tekućina. Smjer rotacije ovisi o smjeru magnetskog polja kao i o smjeru električnog polja između elektroda.

Ovaj jednostavan pokus daje nam priliku da izravno vidimo kako se nabijene čestica giba po kružnici kad na nju djeluje magnetsko polje okomito na smjer njenog gibanja.

Branka Mikuličić, Zagreb

ASTRONOMIJA

Zašto kvazari nisu zvijezde?

Pomoću nekoliko proračuna popratit ćemo otkriće kvazara. Oni su opaženi dvama astronomskim tehnikama: optičkim teleskopima i radio-teleskopima. Radio-teleskop zabilježio je zgusnuti izvor radio-valova, a optički teleskop je na istom mjestu zabilježio modrikastu »zvijezdu«. Obrađivat ćemo primjer kvazara 3C273.

Modrikasta »zvijezda« ozračivala je površinu Zemlje $8{,}8 \cdot 10^{15}$ puta manje nego Sunce. Budući da zvijezda zrači snagom L, a na udaljenosti od nje r smještena je Zemlja, to je ozračenost jednaka

$$E = \frac{L}{4\pi r^2}.$$

Da bismo mogli ustanoviti udaljenost na kojoj se zvijezda nalazi, moramo pretpostaviti kolika je njezina snaga zračenja L u odnosu na Sunčevu snagu zračenja L_0:

$$\frac{r}{r_0} = \sqrt{\frac{L}{L_0} \cdot \frac{E_0}{E}}.$$

tj. $L/L_0 = 1$. Tada iz $E_0/E = 8{,}8 \cdot 10^{15}$ slijedi $r/r_0 = 3{,}4 \cdot 10^7$. No kako znamo da je Sunce od nas udaljeno 500 sekundi svjetlosti, to za 3C273 izlazi udaljenost

$r_1 (L = L_0) = 1500$ godina svjetlosti.

To je još relativno blizu, tj. »zvijezda« se nalazi unutar sustava Mliječnog Puta. Međutim, naša procjena udaljenosti ovisi o pretpostavljenoj snazi zračenja. Pretpostavimo li da je stvaran izvor 10^6 puta intenzivniji od Sunca — jer takve su najsjajnije zvijezde, modri divovi, dobivamo za udaljenost

$r_2 (L = 10^6 L_0) = 1{,}5 \cdot 10^6$ godina svjetlosti,

a to je već udaljenost na kojoj se nalaze druge galaktike. »Zvijezda« se dakle može nalaziti u širokom intervalu udaljenosti pa pripadati ili našem ili nekom drugom zvjezdanom sustavu. A što ako kvazar zrači 10^{12} puta više nego Sunce? Tada će nam račun pokazati da se nalazi na udaljenosti

$r_3 (L = 10^{12} L_0) = 1{,}5 \cdot 10^9$ godina svjetlosti.

Promotrimo sada što nam otkriva spektar kvazara. U njemu su pronađene spektralne linije čije se valne duljine ne podudaraju s valnim duljinama istih tih linija zračenih laboratorijskim izvorom, već su sve povećane za 16%. Do takvih pomicanja najčešće dolazi zbog odmicanja izvora svjetlosti od nas brzinom v, tj. zbog Dopplerovog efekta. Izraz za efekat je:

$$\frac{v}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}.$$

Uzmemo li $\Delta\lambda/\lambda = 0{,}16$, $c = 3000\,000$ km/s, dobivamo $v = 48\,000$ km/s.

Vrijeme je da se začudimo, kako se neka zvijezda može gibati tako velikom brzinom? Mogla bi to biti posljedica neke eksplozije. No ako je zvijezda u našoj vlastitoj Galaktici, tada bismo morali vidjeti i druge posljedice eksplozije. Eksplozija mora biti snažnija ako je izbačena ne samo jedna već više zvijezda. To je stvarno slučaj. Najprije su otkrivene dvije »modrikaste zvijezde« na mjestu radio-izvora, kvazara 3C273 i 3C48, a kasnije njih više stotina. I svi se ti objekti *udaljuju od nas golemim brzinama*. Nijedna od tih »zvijezda« ne pokazuje tangencijalno gibanje, već samo uzduž doglednice — kao da smo mi u centru eksplozije! Ovo je bitan momenat koji dovodi u veliku sumnju zvjezdanu prirodu kvazara. Poteškoću da kvazare protumačimo kao objekte koji bježe iz naše Galaktike moramo povezati sa spoznajom o jednoj drugoj svemirskoj pojavi.

Postoji jedna globalna pojava u kojoj učestvuje cijeli svemir, u kojoj svaki opažač sebe vidi u centru događaja. To je ekspanzija svemira: galaktike se udaljavaju od nas brzinama to većim što su udaljenije, pa se ekspanzija svemira izražava relacijom

$$v = H \cdot r,$$

gdje je konstanta razmjernosti između udaljenosti i brzine H, Hubbleova konstanta, jednaka $2{,}5 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{s}^{-1}$.

Pokušajmo odrediti udaljenost kvazara ako on učestvuje u toj kozmološkoj pojavi. Iz $v = 48\,000$ km/s slijedi:

$r_4 = 1{,}9 \cdot 10^{22}$ km $\approx 2 \cdot 10^9$ godina svjetlosti

Udaljenost izlazi gotovo jednaka onoj koju smo dobili kada smo pretpostavili da kvazar zrači 10^{12} puta više od Sunca.

I to je istina. Kvazari su galaktičke tvorevine u kojih se ističe malena jezgra čije dimenzije nisu veće od jedne godine svjetlosti. Za usporedbu, jezgra Galaktike ima dimenzije od 5000 godina svjetlosti. Iz minijaturne jezgre kvazara istječe energija koja je u nekih primjeraka 1000 puta veća od energije koju zrače obične galaktike. Kvazari su najaktivniji oblici galaktika. Kakav je u njih mehanizam koji u veoma malom dijelu prostora dovodi do najvećih snaga zračenja, nepoznato je i napregnuto se istražuje.

Za slobodan zadatak odredimo svojstva kvazara 3C48 koji Zemlju ozračuje $1{,}4 \cdot 10^{17}$ puta slabije nego Sunce, a pokazuje pomak spektralnih linija prema crvenom od 37%. Na kojoj se udaljenosti nalazi i koliko je puta njegova snaga zračenja L veća od Sunčeve?

Dr. Vladis Vujnović

ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija je, iz tehničkih razloga, primorana objaviti slijedeće **upozorenje**:

Krajnji **rok** za primanje rješenja (A, B, C) iz ovog broja je **10. 3. 1988.** Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 4/155. Bit će objavljena imena samo onih učenika koji riješe *minimum* zadataka: 5-M ili 3-F (ili oboje) ako polaze 3. ili 4. razred, 3-M ili 2-F (ili oboje) ako polaze 1. ili 2. razred.

Ujedno molimo pripaziti na upute rješavateljima koje su na dnu četvrte strane omota.

A) Zadaci iz matematike

1993*. Naći sve četverocifrene brojeve, sastavljene od četiri uzastopne cifre (koje ne moraju biti u rastućem, »normalnom« nizu), tako da svaki takav broj pomnožen sa 2/3 daje broj sastavljen od istih cifara.

1994*. Tri putnika sastali su se da jedu. Prvi je pridonio 3 hljeba, drugi 4 hljeba. Nakon što su tih 7 hljebova podijelili na tri jednaka dijela i sve pojeli, treći putnik daje 7 novčića i kaže: »Plaćam. Vas dvoje podijelite ovaj novac pravedno!«

Koliko novčića pripada prvom, koliko drugom putniku?

[Iz etiopskog učeničkog časopisa HISBAB.]

1995. Odrediti ostatak dijeljenja broja

$$11^{100} + 13^{200} + 17^{300}$$

brojem 7.

1996. Odrediti ostatak dijeljenja polinoma

$$x^{99} + x^3 + 10x + 5$$

polinomom $x^2 + 1$.

1997. Koliko rješenja ima jednadžba

$$x^4 + 100[x] = 100x?$$

(*Nap.* $[x]$ je funkcija »najveće cijelo«.)

1998*. Jednakokračan trapez razdijeljen je dijagonalom na dva jednakokračna trokuta. Koliki su kutovi trapeza?

1999*. Odrediti sve kružne isječke (sektore) kod kojih je mjerni broj opsega jednak mjernom broju površine.

2000. Dvije međašne plohe tetraedra su sukladni jednakostranični trokuti (stranice a). Ostale dvije međašne plohe su jednakokračni pravokutni trokuti. Koliki je radijus upisane kugle?

2001. Dat je tetraedar $ABCD$. Izraziti rastojanje od temena D do težišta strane ABC u funkciji od dužina ivica tog tetraedra.

2002. Uspravnom kružnom stošcu opisana je kugla. Ravnina koja sadrži središte te kugle, a paralelna je s bazom stošca, dijeli stožac na dva dijela jednakih volumena.

Koliki je prikloni kut izvodnice prema bazi?

2003*. Paralelogram rotira jednom oko jedne stranice (duljine $a = 5$) a drugi put oko druge stranice (duljine $b = 2$).

Koliki je omjer volumena nastalih tijela?

2004. $f(x) = \sin^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x + \cos^6 x$

$$f(1) = ?$$

2005. Dokazati da jednadžba

$$2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{x}{6}\right) = \frac{1}{x^2} + x^2$$

nema rješenja.

2006. Kolika je površina trokuta ako su mu vrhovi:

$$A(5, 2, 3),\ B(8, 3, -5),\ C(5, 0, 7)?$$

B) Zadaci iz fizike

840. Kuglica mase 50 grama se izbaci sa zemlje vertikalno u vis brzinom v_0. Kada padne na zemlju, kuglica se odbije (vertikalno) u vis, zatim ponovo padne na zemlju, ponovo se odbije itd. Pretpostavite da prilikom svakog odbijanja od zemlje kuglica izgubi (preda zemlji) jednak postotak svoje *trenutne* energije. Kuglica se drugi put odbije od zemlje 3,97 sekundi nakon izbacivanja, i u ta dva sudara preda zemlji 19,00% svoje *početne* energije. Otpor zraka zanemarite. ($g = 9{,}81\ \mathrm{ms}^{-2}$)

a) Koliki postotak svoje trenutne energije kuglica preda zemlji prilikom svakog odbijanja od nje?

b) Kolikom je početnom brzinom (v_0) kuglica izbačena vertikalno u vis?

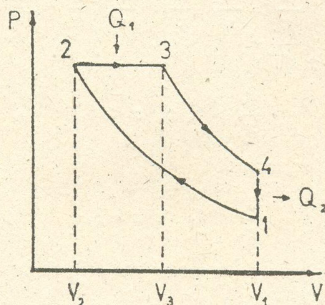
c) Koliki je ukupan impuls sile koji je kuglica predala zemlji u ta dva sudara s njom?

841. Čovjek okreće kuglu na užetu zanemarive mase i dužine 90 cm u vodoravnoj ravnini na visini od 1,5 m iznad zemlje, sve većom i većom brzinom. Uže može izdržati napetost od najviše 44,9 N. Kugla ima volumen od 65,617 cm^3, a načinjena je od bronce koja je smjesa bakra (gustoće 8900 $\mathrm{kg/m}^3$) i kositra

* Zadaci označeni zvjezdicom predviđeni su prvenstveno za 15—16-godišnje učenike.

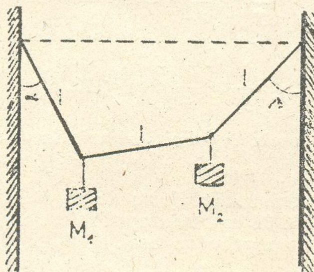
(gustoće 7300 kg/m^3). Kada uže pukne, kugla udari u zemlju brzinom od 10,5 m/s. Izračunajte koliko u kugli ima grama bakra, a koliko grama kositra. ($g = 9{,}81$ m/s^2)

842. Termodinamički ciklus Dieselovog motora prikazan je na slici. Odrediti koeficijent iskorištenja Dieselovog motora za koji je $\varepsilon = V_1/V_2 = 9$, a $\varphi = V_3/V_2 = 5$. Adijabatski



koeficijent neka je $\gamma = 5/3$. Gorivo izgara na dijelu 23 ciklusa. izgorjeli se plinovi ispuštaju iz cilindra na dijelu 41, a dijelovi ciklusa 12 i 34 su adijabatska kompresija i ekspanzija.

843. Između dviju zgrada razapeto je uže duljine $3l$ tako da su krajevi užeta na istim visinama. Na udaljenosti l od svakog kraja užeta obješeni su utezi nepoznatih masa. Naći odnos



masa utega ako su kutovi koje zatvaraju zidovi zgrada i uže jednaki $\alpha = 30°$ i $\beta = 45°$. Zanemariti težinu užeta.

844. Homogeno magnetsko polje indukcije $B = 12$ mT usmjereno je okomito na homogeno električno polje jakosti $E = 15$ kV/m. Nabijena čestica, najprije ubrzana razlikom potencijala $U = 10$ kV ulijeće u električno i magnetsko polje tako da joj je brzina okomita na oba polja. Odgovorite: (a) Kada će gibanje čestice biti jednoliko i pravocrtno? (b) Odredite odnos q/m (naboj/masa) čestice za takvo gibanje!

845. Električni grijač ima dva dijela. Ako oba dijela uključimo serijski, voda proključa za 30 min, a ako ih uključimo paralelno onda za 6,67 min. Napon na kontaktima grijača je uvijek isti, kao i koeficijent korisnog djelovanja. Izračunajte za koliko minuta će proključati ista količina vode ako je uključen samo jedan dio grijača!

C) Zadaci iz matematike za ekonomsko usmjerenje

681. Svota od 100 000 dinara uložena je početkom godine uz 60% godišnje dekurzivno i oročenje na 3 mjeseca. Poslije 7 mjeseci ulagač ukamaćenu svotu oročuje na 13 mjeseci uz 80% godišnje dekurzivno. Koliko će imati na štednom računu krajem te godine, ako se primjenjuje mjesečni konformni kamatnjak?

682. Roba poskupi za 20%. Za koliko % bi trebala još poskupiti da konačna cijena bude 180% početne cijene?

683. Zadane su matrice A, B, C i to: $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Za koju vrijednost x u matrici B će vrijediti $A \cdot B = 3C$?

684. Zadane su matrice:

$$A = [2\ 1\ 4],\quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte $A \cdot B$ i $B \cdot A$.

685. Minimizirajte $z = 3x + 7y$ uz ove uvjete $x + y \geq 3$, $x + 4y \geq 6$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Problem riješite grafički.

D) Rješenja iz matematike

1965. *Dokazati da kvadrat ma kojega prostog broja (primbroja) $p > 3$ pri dijeljenju sa 12 daje ostatak 1.*

Rješenje **A**:

Svi prirodni brojevi imaju jedan od oblika $6k - 1$, $6k$, $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$ $(k \in N)$.

Kako su brojevi $6k$, $6k + 2$, $6k + 4$ djeljivi sa 2, a brojevi oblika $6k + 3$ djeljivi sa 3, to prosti brojevi $p > 3$ moraju biti oblika $6k \pm 1$. Njihovi kvadrati su oblika:

$$(6k \pm 1)^2 = 36k^2 \pm 12k + 1 = 12(3k^2 \pm k) + 1,$$

tj. pri djeljenju sa 12 daju ostatak 1.

Dejan Bašić (3), Trebinje

Rešitev **B**

Če nalogo malce predrugačimo, vidimo, da zahteva, da dokažemo, da $12 \mid p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$.

Če je $p > 3$, je liho, torej se da zapisati kot $2k + 1$:

$$(p-1)(p+1) =$$
$$= (2k+1-1)(2k+1+1) =$$
$$= 2k \cdot (2k+2) = 4k \cdot (k+1) = 4n.$$

Tako smo dokazali deljivost s 4.

Oglejmo si še tri zaporedna naravna števila: $p - 1, p$ in $p + 1$. Eno od njih mora biti deljivo s 3. Ker je p praštevilo, nam preostane le še možnost, da $3 \mid (p - 1)$ ali $3 \mid (p + 1)$.

Če je število hkrati deljivo s 3 in 4, potem je tudi deljivo z 12.

Marjan Jerman (2), Trbovlje

1966. *Naći sve prirodne brojeve x, y, z ($x > y > z$) za koje vrijedi*

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 1.$$

Rješenje **A:**

Očigledno je $z > 3$.

1° Za $z = 4$ je

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{4},$$

tj.

$$8x + 4y - xy = 0.$$

Ta je jednadžba ekvivalentna jednadžbi

$$(x-4)(y-8) = 2^5.$$

Uvjet $x > y > z$ zadovoljavaju samo rješenja

$$x = 20, y = 10 \text{ i } x = 36, y = 9.$$

2° a $z = 5$ je

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{2}{5} \Rightarrow (2x-5)(y-5) = 5^2.$$

Uvjet $x > y > z$ zadovoljava samo

$$x = 15, \quad y = 6.$$

3° Za $z = 6$ je

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow (x-2)(y-4) = 2^3.$$

Niti jedno od rješenja ne zadovoljava uvjet $x > y > z$.

4° Za $z > 6$ je

$$x > 6 \text{ i } y > 6 \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{6}, \ \frac{2}{y} < \frac{2}{6},$$
$$\frac{3}{y} < \frac{3}{6},$$

tj.

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} < 1.$$

Dakle, jedina rješenja su:

$$(20, 10, 4), (36, 9, 4), (15, 6, 5).$$

Dijana Ilišević (1), Beli Manastir

Rješenje **B:**

Iz uvjeta $x > y > z$ slijedi

$$\frac{1}{z} > \frac{1}{x}, \ \frac{2}{z} > \frac{2}{y}, \ \frac{3}{z} = 3.$$

Zbrajanje daje

$$\frac{6}{z} > 1, \text{ tj. } z < 6.$$

Također mora biti

$$\frac{3}{z} < 1, \text{ tj. } z > 3.$$

Zaključujemo da z može biti 4 ili 5. Ispitajmo prvo slučaj $z = 4$. Tada je

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{4}$$

pa mora vrijediti

$$\frac{2}{y} < \frac{1}{4} \Rightarrow y > 8,$$

a zbog

$$\frac{1}{y} > \frac{1}{x} \text{ i } \frac{1}{y} = \frac{2}{y}$$

imamo

$$\frac{3}{y} > \frac{1}{4} \Rightarrow y < 12.$$

Dakle, y može poprimiti tri vrijednosti: 9, 10 i 11.

Provjerom zaključujemo da za 9 i 10 dobivamo 20 i 36 kao vrijednosti za x, dok $y = 11$ ne daje za x prirodan broj.

Ako je $z = 5$ tada vrijedi

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{2}{5}$$
$$\frac{2}{y} < \frac{2}{5} \Rightarrow y > 5.$$

Iz uvjeta zadatka zaključujemo

$$\frac{1}{y} > \frac{1}{x}$$
$$\frac{2}{y} = \frac{2}{y}$$
$$\overline{\frac{3}{y} > \frac{2}{5} \Rightarrow y < \frac{15}{2}.}$$

Kako je $y \in N$ on može biti samo 6 ili 7.

Provjerom zaključujemo da za $y = 6$ x poprima vrijednost 15, dok za $y = 7$ x ne zadovoljava uvjete zadatka. Postoje tri trojke za koje vrijede uvjeti zadatka:

$$(x, y, z) \in \{(36, 9, 4), (20, 10, 4), (15, 6, 5)\}.$$

Dalibor Tužinski (2), Slav. Požega

Rješenje **C**:

Očigledno je $\frac{3}{z} < 1$ pa je stoga $z > 3$, a kako je $x > y > z$ mora biti $x > 5$, $y > 4$.

Pošto imamo tri sabirka to bi rješenje bilo $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$, ali zbog zadatih uslova $\frac{1}{x}$ i $\frac{2}{y}$ su sigurno manji od $\frac{3}{z}$ pa stoga $\frac{3}{z}$ mora biti veće od $\frac{1}{3}$ odnosno $z < 9$. Drugi sabirak $\frac{2}{y}$ je veći od $\frac{1}{x}$. Najveća vrijednost $\frac{1}{x}$ je $\frac{1}{6}$, pa je stoga $\frac{2}{y} > \frac{1}{6}$, tj. $y < 12$. Ukoliko uzmemo najveću vrijednost $\frac{3}{z}$, tj. $\frac{3}{4}$ tada $\frac{2}{y}$ ima vrijednost $\frac{2}{9}$. Imamo $\frac{2}{9} + \frac{3}{4} = \frac{35}{36}$ što znači da je prvi sabirak $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{36}$, tj. $x \leqslant 36$.

Sad kad imamo ova ograničenja:

$$36 \geqslant x > 5;\ 12 > y > 4;\ 9 > z > 3$$

pomoću narednog BASIC-programa lako dobijamo rješenja:

$$\begin{array}{lll} x_1 = 15 & x_2 = 20 & x_3 = 36 \\ y_1 = 6 & y_2 = 10 & y_3 = 9 \\ z_1 = 5 & z_2 = 4 & z_3 = 4 \end{array}$$

```
1Ø CLS
2Ø FOR X = 6 TO 36
3Ø FOR Y = 5 TO 12
4Ø FOR Z = 3 TO 9
5Ø IF X * Y * Z = Y * Z + 2 * X * Z +
   + 3 * Y * X AND X > Y AND Y > Z
   THEN PRINT X; Y; Z
6Ø NEXT Z : NEXT Y : NEXT X.
```

Program radi na CPC-6128.

(Vrijeme: 50 s)

Predrag Miletić (3), Foča

1967. *Одредити све целе бројеве x тако га $x^2 + 3x + 24$ буде квадрат целог броја.*

Решење **A:**

$$x^2 + 3x + 24 = p^2,\ p \in N$$

$$4x^2 + 12x + 96 = 4p^2$$

$$(2x + 3)^2 + 87 = 4p^2$$

$$(2p - 2x - 3)(2p + 2x + 3) =$$

$$= (\pm 1) \cdot (\pm 87) = (\pm 3) \cdot (\pm 27).$$

Разликујемо следеће случајеве:

a) $\left.\begin{array}{l} 2p - 2x - 3 = \pm 1 \\ 2p + 2x + 3 = \pm 87 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{\pm 86 - 6}{4}$

(20, −23)

b) $\left.\begin{array}{l} 2p - 2x - 3 = \pm 3 \\ 2p + 2x + 3 = \pm 29 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{\pm 26 - 6}{4}$

(5, −8)

c) $\left.\begin{array}{l} 2p - 2x - 3 = \pm 29 \\ 2p + 2x + 3 = \pm 3 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{\mp 26 - 6}{4}$

(−8, 5)

d) $\left.\begin{array}{l} 2p - 2x - 3 = \pm 87 \\ 2p + 2x + 3 = \pm 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{\mp 86 - 6}{4}$

(−23, 20)

Тражени бројеви су: 20, 5, —8 и —23.

$$20^2 + 3 \cdot 20 + 24 = 484 = 22^2$$

$$5^2 + 3 \cdot 5 + 24 = 64 = 8^2$$

$$(-8)^2 + 3(-8) + 24 = 64 = 8^2$$

$$(-23)^2 + 3 \cdot (-23) + 24 = 484 = 22^2.$$

Владимир Петковић (4), Ниш

Rješenje **B:**

Broj x mora biti u intervalu od -30 do 30 jer je $30^2 - 29^2 = 59$, dok se nakon transformacije zadanog izraza u

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{87}{4}$$

to očigledno vidi (jer je $\frac{87}{4} < 59$).

Dalje možemo zadatak riješiti programski:

```
1Ø FOR x = -3Ø TO 3Ø
2Ø LET A = SQR (x * x + 3 * x + 24)
3Ø IF A = INT A THEN PRINT x
4Ø NEXT x
```

Program daje rješenja: $x = -23, -8, 5, 20$.
(Vrijeme: 8 s.)

Ivica Vilibić (3), Split

1968. *Odrediti tri kompleksna broja modula* 1 *sa svojstvom da im je i zbir i proizvod jednak* 1.

Neka su z_1, z_2 i z_3 traž i kompleksni brojevi. Po uslovu zadatka imamo

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \qquad (1)$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 1 \qquad (2)$$

$$z_1 z_2 z_3 = 1 \qquad (3)$$

Iz (3) imamo

$$z_1 z_2 = \frac{1}{z_3} = \frac{1}{z_3} \cdot \frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_3} = \frac{\bar{z}_3}{|z_3|^2} = \bar{z}_3$$

zbog uslova (1). Analogno se dobija

$$z_1 z_3 = \bar{z}_2 \text{ i } z_2 z_3 = \bar{z}_1.$$

Sabirajući dobijene jednakosti i koristeći uslov (2) dobijamo

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = \bar{z}_3 + \bar{z}_2 + \bar{z}_1 =$$

$$= \overline{z_1 + z_2 + z_3} = 1,$$

pa vidimo da su na osnovu Viète-ovih pravila z_1 z_2 i z_3 koreni jednačine

$$z^3 - z^2 + z - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z-1)(z^2+1) = 0,$$

a to su brojevi 1, $-i$, i.

Dejan Delić (4), Novi Sad

1969. *Poišči vsa trimestna števila, ki so enaka vsoti fakultet svojih cifer!*

Rešitev **A:**

$$100a + 10b + c = a! + b! + c!$$

$a! + b! + c! < 1000 \Rightarrow \max(a, b, c) \leq 6$ (Do.: $7! > 1000$, $6! < 1000$)

$a! + b! + c! > 99 \Rightarrow$ vsaj eden od a, b ali c mora biti 5 ali 6 (Do.: brez 5, 6 bi bila največja vsota $4! + 4! + 4! < 99$).

Če bi bilo eno število 6, bi bila vsota $a! + b! + c! > 6! = 720$, tega pa si ne moremo privoščiti, saj imamo za stotice največje število 6. Torej $\max(a, b, c) = 5$.

Eno število je zagotovo 5. Obstajajo tri možnosti:

I. 5 je na mestu stotic ($5bc$)

Ne, to ne gre! Največje možno število, ki ga lahko dobimo je $5! + 5! + 5! = 360 < 500$.

II. 5 je na mestu desetic ($a5c$)

Največje tako število bo torej $4! + 5! + 5! = 264$, torej bo na mestu stotic 1 ($15c$) ali 2 ($25c$).

a) 150, $1! + 5! + 0! \neq 150$
151, $1! + 5! + 1! \neq 151$
152, $1! + 5! + 2! \neq 152$
153, $1! + 5! + 3! \neq 153$
154, $1! + 5! + 4! \neq 154$
155, $1! + 5! + 5! \neq 155$

b) 254, $2! + 5! + 4! < 200$
255, $2! + 5! + 5! \neq 255$

III. 5 je na mestu enic ($ab5$)

Kot sem ugotovil že prej, bo na mestu stotic 1 ali 2 ($1b5$ ali $2b5$)

a) 105, $1! + 0! + 5! \neq 105$
115, $1! + 1! + 5! \neq 115$
125, $1! + 2! + 5! \neq 125$
135, $1! + 3! + 5! \neq 135$
145, $1! + 4! + 5! = 145$
155, $1! + 5! + 5! \neq 155$

b) 245, $2! + 4! + 5! < 200$
255, $2! + 5! + 5! \neq 255$

Ostalih možnosti ni. Edino tako število je 145:

$$1! + 4! + 5! = 145.$$

Marjan Jerman (2), Trbovlje

Rješenje **B:**

$$A = 100x + 10y + z = x! + y! + z!$$

Kako je:

$6! = 720$ a $7! = 5040 \Rightarrow$ cifre moraju biti manje od 6,
$3 \cdot 4! = 72 \Rightarrow$ jedna cifra mora biti veća od 4,
$5! = 120 \Rightarrow A \geqslant 120$,
$3 \cdot 5! = 360 \Rightarrow A \leqslant 360$.

Dakle:

$$355 > A > 125$$

Maksimalni zbroj faktorijela cifara broja A ima broj 355 i iznosi $3! + 5! + 5! = 246$.

Dosadašnje konstatacije i zaključke zadovoljavaju slijedeći brojevi:

125, 135, 145, 150, 151, 152, 153, 154, 155
205, 215, 225, 235, 245.

Od navedenih brojeva uvjet zadatka zadovoljavaju parni brojevi ako nemaju cifru 1, odnosno imaju dvije cifre 1, i neparni brojevi koji imaju jednu cifru 1.

Taj dodatni uvjet zadovoljavaju brojevi:

125, 135, 145, 153, 155
215.

Kontrolom svakog broja posebno ustanovio sam da jedino broj 145 zadovoljava uvjete zadatka:

$$\mathbf{145} = 1! + 4! + 5!$$

Josip Tambača (2), Šibenik

Rješenje **C:**

Očito je da cifre tog broja ne mogu biti 7, 8, 9 jer im je faktorijel veći od 999. Također,

ni 6 ne može biti cifra tog broja jer je 6! = 720, pa bi jedna cifra morala biti $\geqq 7$.

Uz pomoć slijedećeg programa dobivamo rješenje **145.**

```
10 FOR a% = 0 TO 5 : READ x% (a%) :
   : NEXT
20 DATA 1, 1, 2, 6, 24, 120
30 FOR a% = 1 TO 5
40 FOR b% = 0 TO 5
50 FOR c% = 0 TO 5
60 IF 100 * a% + 10 * b% + c% =
   = x% (a%) + x% (b%) + x% (c%)
   THEN PRINT a%; b%; c%
70 NEXT : NEXT : NEXT
```

Program je pisan u LOCOMOTIVE BASIC-u i radi manje od 2 sekunde.

Aleksandar Mićić (2), Banja Luka

1970. *Zadana je funkcjja*

$$f(x) = (m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 5$$

gdje je m realan parametar.

Pokazati da svi prirodni grafovi prolaze jednom zajedničkom točkom. Koja je to točka?

Rješenje **A:**

$$f(x) = mx^2 + x^2 - 2mx + 2x + m - 5 =$$
$$= (x^2 - 2x + 1)m + x^2 + 2x - 5$$

Da vrijednost $f(x)$ ne ovisi o m treba biti

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Za $x = 1$ dobivamo $f(1) = -2$. Tražena točka je

$$T(1, -2).$$

Dalibor Paar (3), Zagreb

Rešitev **B:**

$$(m_1 + 1) \cdot x^2 - 2(m_1 - 1) \cdot x +$$
$$+ m_1 - 5 = (m_2 + 1) \cdot x^2 -$$
$$- 2(m_2 - 1) \cdot x + m_2 - 5$$
$$x^2(m_1 - m_2) - 2x(m_1 - m_2) +$$
$$+ m_1 - m_2 = 0$$
$$(m_1 - m_2) \cdot (x^2 - 2x + 1) = 0$$
$$(m_1 - m_2) \cdot (x - 1)^2 = 0$$

Neodvisno od m je rešitev $x = 1 \Rightarrow y = -2$.

Marjan Jerman (2), Trbovlje

Rješenje **C:**

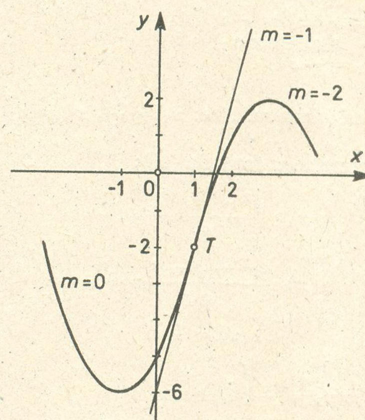
Za $m = -1$ imamo

$$y = f(x) = 4x - 6$$

tj. parabola se degeneriše u pravac.

Rješavanjem sistema (jednačine pravca i jednačine pramena parabola) imamo:

$$4x - 6 = (m+1)x^2 -$$
$$- 2(m-1)x + m - 5$$
$$(m+1)x^2 - 2(m+1)x + m + 1 = 0$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$$
$$y_1 = y_2 = 4 \cdot 1 - 6 = -2.$$



Dakle, pravac $y = 4x - 6$ je tangenta na sve parabole u tački $T(1, -2)$.

Siniša Šekara (3), Pale

1971. *Rješenja jednadžbe*

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

čine aritmetičku progresiju. Naći vezu između a, b, c.

Kako rješenja jednačine $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ obrazuju aritmetičku progresiju, ona moraju biti oblika

$$x - t, \quad x, \quad x + t$$

Po Vijetovim pravilima je

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a \Rightarrow (x - t) +$$
$$+ x + (x + t) = -a \Rightarrow 3x = -a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = -\frac{a}{3}.$$

Kada se ovo uvrsti u polaznu jednačinu dobijamo

$$-\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} + c = 0.$$

Prema tome: a, b, c zadovoljavaju vezu

$$2a^3 - 9ab + 27c = 0.$$

Nihad Borovina (2), Foča

1972. *Rešenja jednačine*

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

čine geometrijsku progresiju. Naći vezu između a, b, c.

Koristićemo Vijetovu teoremu

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = -a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b \\ x_1x_2x_3 = -c \end{array}\right\} \qquad (*)$$

Po uslovima zadatka: $x_1 = \frac{x_2}{q}$, $x_3 = x_2 \cdot q$.

Zamenimo to u formule (*):

$$x_2 \cdot \frac{q^2 + q + 1}{q} = -a$$

$$x_2^2 \cdot \frac{q^2 + q + 1}{q} = b$$

$$x_2^3 = -c.$$

Kako je $x_2 = -\sqrt[3]{c}$ imamo

$$b = x_2 \cdot x_2 \cdot \frac{q^2 + q + 1}{q} = -\sqrt[3]{c} \cdot (-a),$$

tj.

$$a \cdot \sqrt[3]{c} - b = 0 \text{ ili } b^3 = a^3 c.$$

Jovan Sokolović (2), Pirot

1973. *Razriješiti u (skupu R) sistem*

$$x + y = 2, \; xy - z^2 = 1.$$

$$x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x$$

$$x(2 - x) - z^2 - 1 = 0$$

$$2x - x^2 - z^2 - 1 = 0$$

$$-(x - 1)^2 - z^2 = 0$$

$$(x - 1)^2 + z^2 = 0.$$

Kako je $a^2 \geqslant 0$ za svako $a \in R$, posljednja jednakost je moguća samo ako je $z = 0$ i $(x - 1)^2 = 0$.

$$z^2 = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$y = 2 - x \Rightarrow y = 1.$$

Rješenje je jedinstveno:

$$x = 1, \; y = 1, \; z = 0.$$

Krešimir Franjić (1), Sarajevo

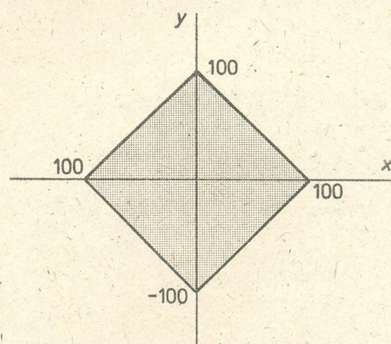
1974. *Koliko različitih cjelobrojnih rješenja ma nejednadžba*

$$|x| + |y| < 100?$$

Rješenje **A**:

Rješenja nejednadžbe možemo prikazati u pravokutnom koordinatnom sustavu.

Cjelobrojna rješenja su sve točke s cjelobrojnim koordinatama *unutar* kvadrata.



Točaka s apscisom 99 ima jedna: (99, 0), s apscisom 98 tri: (98, −1), (98, 0), (98, 1); itd,..., s apscisom 1 ima ih točno 197 [od (1, −98) do (1, 98)]. Cjelobrojnih rješenja s desne strane y-osi ima ukupno $1 + 3 + 5 + \ldots + 197 = 99^2 = 9801$.

Isto toliko točaka s cjelobrojnim koordinatama koje zadovoljavaju nejednadžbu $|x| + |y| < 100$ ima s lijeve strane y-osi.

Na samoj ordinatnoj osi ima 199 traženih točaka.

Ukupan broj različitih cjelobrojnih rješenja zadane nejednadžbe je

$$2 \cdot 9801 + 199 = 19801.$$

Dalibor Tužinski (2), Slav. Požega

Решење **B**:

Пошто је 99 највећи цео број мањи од 100 јасно је да је максимална вредност $|x|$, односно $|y|$, која одговара неком решењу 99. Због тога минимална вредност x, односно y, у неком решењу може бити — 99, а максимална 99.

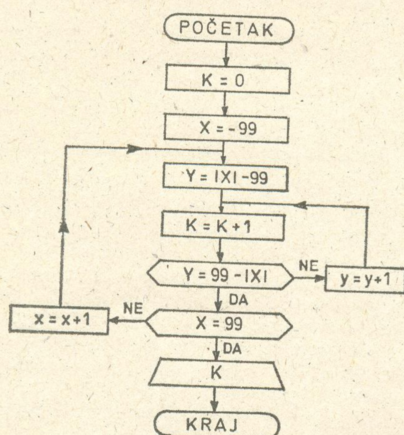
$$(|a| = b \Rightarrow a = b \vee a = -b).$$

Нека се x креће од −99 до 99 са кораком 1. За неку тренутну вредност x тачно је одређен интервал у коме се може кретати

y тако да уређена двојка (x, y) буде решење дате неједначине. Границе интервала целобројног y одређујемо као решење једначине:

$$|y| = 99 - |x|.$$

За $y \geqslant 0$ је $y = 99 - |x|$ што је управо максимална вредност y која, за тренутно x, заодовољава неједначину. За $y < 0$ је $y = -(99 - |x|)$, односно $y = |x| - 99$ што је управо минимална вредност y, за тренутно x, која задовољава неједначину. Значи: за одређено x, y може узимати све целобројне вредности из интервала $[|x| - 99, 99 - |x|]$. Одређивање траженог броја решења своди се на пребројавање свих одговарајућих вредности за y, при тренутном x, које се креће од -99 до 99. Изнесени поступак може се представити следећом алгоритамском шемом:



Види се да одговарајући BASIC програм мора да се заснива на 2 петље које прате вредности x, односно y. Број решења налази се у бројачу K који се штампа на крају обраде. Програм изгледа овако:

```
10 K = 0
20 FOR X = -99 TO 99
30 FOR Y=ABS(X)-99 TO 99-ABS(X)
40 K = K + 1
50 NEXT Y
60 NEXT X
70 PRINT K
```

(Ово је рађено на Комодору 64).

Ознака у BASIC-у за апсолутну вредност броја x је ABS (X).

Програм даје решење: укупан број различитих целобројних решења дате неједначине је 19801.

Драган Марић (3), Крушевац

1975. *Zadan je kut 63°. »Klasičnom« konstrukcijom (tj. samo ravnalom i šestarom) razdijeliti taj kut na:*

a) 3 *jednaka dijela,*

b) 7 *jednakih dijelova.*

Rješenje **A** (najčešće):

$$63° - 60° = 3°;$$

a) $3° \cdot 7 = 21° (= 63° : 3)$,

b) $3° \cdot 3 = 9° (= 63° : 7)$.

Rješenje **B**:

b) $3 \cdot 63° - 180° = 9° (= 63° : 7)$,

a) $30° - 9° = 21° (= 63° : 3)$.

Dejan Bašić (3), Trebinje

Решење **C**:

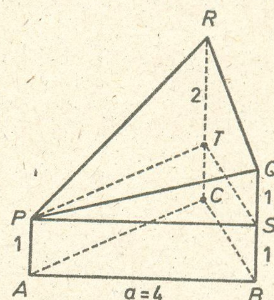
108° у правилном петоуглу; $9° = (108° - 90°) : 2$, $21° = 30° - 9°$.

Драган Манић (2), Пирот

1976. *Zadan je jednakostraničan trokut ABC sa stranicama duljine 4. Na ravninu tog trokuta povučene su okomice:* $\overline{AP} = 1$, $\overline{BQ} = 2$, $\overline{CR} = 3$ *na istu stranu (tj. u isti poluprostor).*

Koliki je volumen tijela (koso odsječene prizme) ABCPQR?

Rješenje **A**:



Dato tijelo sastoji se od trostrane prizme $ABCPST$ i četvorostrane piramide $PSQRT$. Prema tome, zapremina tijela jednaka je zbiru zapremina prizme i piramide $(V_1 + V_2)$.

$$V_1 = B_1 \cdot H_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H_1 = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} \cdot 1 = 4\sqrt{3},$$

$$V_2 = \frac{B_2 \cdot H_2}{3} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1+2}{2} \cdot 4\right) \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3},$$

$$V = V_1 + V_2 = 8\sqrt{3}.$$

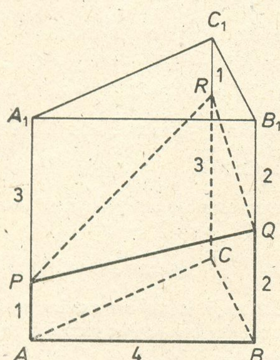
Mirsad Subašić (1), Zenica

Rješenje **B**:

Produžimo zadane okomice preko vrhova P, Q i R tako da je

$$\overline{PA}_1 = 3,\ \overline{QB}_1 = 2 \text{ i } \overline{RC}_1 = 1.$$

Lako se uvida da su tijela $ABCPQR$ i $A_1B_1C_1PQR$ sukladna i jednakog su volumena. Ta dva tijela »sklapaju« pravilnu trostranu prizmu $ABCA_1B_1C_1$ visine 4.



Traženi volumen tijela $ABCPQR$ jednak je, dakle, polovini volumena prizme $ABCA_1B_1C_1$:

$$V_{ABCPQR} = \frac{V_{ABCA_1B_1C_1}}{2} = \frac{\frac{4^2}{4}\sqrt{3}\cdot 4}{2} = 8\sqrt{3}.$$

Dalibor Tužinski (2), Sl. Požega

Решение **C**:

$$V = P_{\triangle ABC}\cdot\frac{\overline{AP}+\overline{BQ}+\overline{CR}}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1+2+3}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{6}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{4^2\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{16\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}.$$

или

$$V \approx 13{,}86.$$

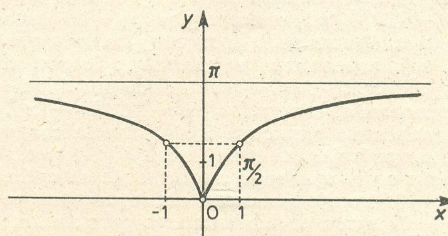
Весна Маринова (3), Битола

1977. *Да се нацрта графикот на функцијата*

$$y = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Дефиниционата област на дадената функција е множеството на сите реални броеви, бидејќи $\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| \leqslant 1$ за сите x.

Графикот на функцијата е симетричен по однос на y-оската затоа разгледуваме само за $x \geqslant 0$.



Од даденото равенство добиваме $\cos y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ бидејќи е

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos y}{1+\cos y}} = \sqrt{x^2} = x,$$

каде пред коренот стое знак + бидејки е $0 \leqslant y < \pi$, $0 \leqslant \frac{y}{2} < \frac{\pi}{2}$ и следователно $\operatorname{tg}\frac{y}{2} \geqslant 0$. Од равенката $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = x$ добиваме $y = 2\operatorname{arc\,tg} x$. Спрема тоа графикот на дадената функција за $x \geqslant 0$ се добива од познатиот график на функцијата $y = 2\operatorname{arc\,tg} x$. со одвојување на нејзините ординати.

Весна Маринова (3), Битола

1978. *Koliko ima troznamenkastih brojeva sa samim različitim znamenkama?*

Rješenje **A**:

Broj traženih brojeva jednak je broju varijacija 3. razreda bez ponavljanja od 10 elemenata umanjenih za broj varijacija 2. razreda bez ponavljanja od 9 elemenata (jer znamenka 0 ne može biti na mjestu stotica):

$$V_{10}^3 - V_9^2 = 10\cdot 9\cdot 8 - 9\cdot 8 = 720 - 72 = 648.$$

Dijana Ilišević (1), Beli Manastir

Rešenje **B**:

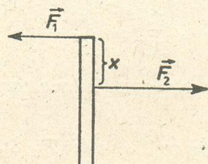
Kako na prvom mestu sleva može stajati jedna od 9 raspoloživih cifara (0 ne može), na drugom jedna od 9 preostalih (uključujući i 0), a na trećem jedna od 8 neupotrebljenih, trocifrenih brojeva sa različitim ciframa ima $9\cdot 9\cdot 8 = 648$.

Biljana Jovanović (3), Knjaževac

E) Rješenja iz fizike

826. *Štap mase $m = 1$ kg giba se translatorno akceleracijom $a = 2\ \mathrm{m/s^2}$ pod dejstvom sila F_1 i F_2 gdje je $x = 20$ cm i $F_2 = 5$ N. Koliko je dugačak štap?*

Označimo dužinu štapa sa L. Vidimo da se štap nalazi u dinamičkoj ravnoteži, pa se kreće translatorno. To znači da su momenti sila koje deluju na štap uravnoteženi u odnosu na osu



koja prolazi kroz centar mase štapa (na udaljenosti $L/2$ od kraja štapa) i koja je normalna na štap, pa imamo

$$F_1 \cdot \frac{L}{2} = F_2 \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right). \qquad (*)$$

Štap se kreće stalnom akceleracijom usled dejstva rezultujuće sile $R = F_2 - F_1 = ma$.

Sređivanjem (*) dobijamo:

$$(F_2 - F_1)\frac{L}{2} = F_2 x, \quad ma \cdot \frac{L}{2} = F_2 x.$$

Odavde je

$$L = \frac{2F_2 x}{m a} = 1 \text{ m}.$$

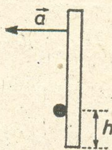
Dejan Delić (4), Novi Sad

827. *Kuglica mase $m = 20$ g nalazi se na vertikalnoj ploči koja se kreće translatorno ubrzanjem $a_1 = 4g$ u horizontalnom pravcu.*

a) *Kolikom snagom kuglica deluje na ploču?*

b) *Ako je koeficijent trenja između kuglice i ploče $\mu = 0{,}5$ odrediti ubrzanje ploče a_2 pri kome će kuglica po{eti padati;*

c) *Ako je ubrzanje ploče $a_3 = g$ koliko će vremena kuglica padati sa visine $h = 10$ cm?*



a) Pri ubrzanom kretanju ploče na kuglicu deluje inercijalna sila čiji je smer suprotan od smera kretanja ploče. Upravo to je sila kojom kuglica deluje na ploču, i ona iznosi

$$F = m\, a_1 = 0{,}785 \text{ N}.$$

b) Na kuglicu deluje sila teže mg vertikalno naniže, a vertikalno naviše sila trenja $\mu\, m\, a_2$. Uslov da bi kuglica počela padati je:

$$m g \geqslant \mu\, m\, a_2,$$

tj. odavde sledi da se ploča mora kretati ubrzanjem a_2 koje ispunjava uslov

$$a_2 \leqslant \frac{g}{\mu}; \quad a_2 \leqslant 2g.$$

c) Ubrzanje kuglice je $g - \mu a_3$. Za pad kuglice je:

$$h = \frac{1}{2}(g - \mu a_3)\, t^2 = \frac{1}{4} g\, t^2 \Rightarrow$$

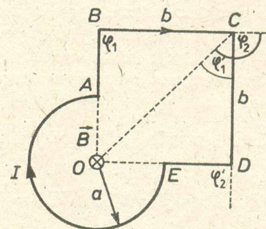
$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{4h}{g}} = 0{,}2 \text{ s}.$$

Miloš Guzijan (4), Zrenjanin

828. *Naći magnetsku indukciju B u točki O petlje kojom teče struja I ako su zadane veličine $a = 10$ cm i $b = 20$ cm.*
(*O je centar kruga.*)

Od kružnog dijela petlje magnetska indukcija (po pravilu desne ruke) ima smjer u ravninu crtnje i iznosi

$$B_1 = \frac{3}{4} \cdot \mu_0 H = \frac{3}{4} \cdot \mu_0 \cdot \frac{I}{2a} = \frac{\mu_0 \cdot 3I}{8a}.$$

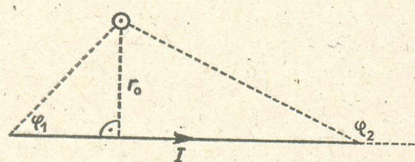


Magnetsku indukciju od dijela ravnog vodiča možemo naći iz izraza

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{r_0} (\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2).$$

Za dijelove vodiča $\overline{AB}$ i $\overline{DE}$ u točki O nema magnetske indukcije jer je $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ i $\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 = 0$.

Za dijelove vodiča $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ magnetska indukcija ima isti smjer (pravilo desne ruke) u ravninu crtnje. Za dio $\overline{BC}$ je $r_0 = b$, $\varphi_1 = 90°$, $\varphi_2 = 135°$, a za $\overline{CD}$ je $r_0 = b$, $\varphi_2' = 45°$, $\varphi_1' = 90°$.



U oba slučaja dobivamo iste vrijednosti za magnetsku indukciju jer je osim $r_0 = b$ zajedničko i

$$\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 = \cos 90° - \cos 135° = \cos 45° - \cos 90° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Magnetska indukcija jednog od ova dva dijela jednaka je

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{b} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{8\pi b}$$

Ukupna magnetska indukcija u točki O ima smjer u ravninu crtnje i iznosi

$$B = B_1' + 2B_2 = \frac{\mu_0 \cdot 3I}{8a} + \frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{8\pi b} = \mu_0 I/8 \left(\frac{3}{a} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi b}\right) \approx$$

$$\approx (5{,}42 \cdot 10^{-6}\, I/\mathrm{A})\ \mathrm{T}.$$

Dalibor Tužinski (2), Slav. Požega

829. *Kao rezultat izobarnog grijanja za $\Delta T = 72$ K jednog mola idealnog plina predana mu je toplina $Q = 160$ kJ. Nađi rad koji je izvršio plin, promjenu njegove unutrašnje energije i vrijednost $\varkappa = c_p/c_v$.*

Rad koji je izvršio plin tokom izobarnog grijanja je

$$W = nR\Delta T = (1 \cdot 8{,}31 \cdot 72) = 0{,}6\ \mathrm{kJ}.$$

Vrijednost $Q = 160$ kJ, tj. toplina koja je predana jednom molu plina izgleda prevelika u odnosu na rad koji je izvršio plin. Nadalje, računajući dalje dobivamo nerealne rezultate za promjenu unutrašnje energije i vrijednost $\varkappa$ ($\Delta U = 159{,}4$ kJ, $\varkappa = 1$). Rezultate mnogo bliže stvarnosti daje $Q = 1{,}6$ kJ što dalje u rješavanju koristimo kao ispravnu vrijednost za toplinu predanu jednom molu plina. Primjenjujući 1. zakon termodinamike dobivamo traženu promjenu unutrašnje energije:

$$Q = W + \Delta U$$

$$\Delta U = Q - W = (1{,}6 - 0{,}6)\ \mathrm{kJ} = 1\ \mathrm{kJ}.$$

Kako se radi o jednom molu plina možemo pisati

$$\left.\begin{array}{l} c_v = \dfrac{\Delta U}{\Delta T} \\ c_p = c_p = R \\ \dfrac{c_v}{c_v} = \varkappa \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta U = \frac{R}{\varkappa - 1} \cdot \Delta T = \frac{W}{\varkappa - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varkappa \cdot \Delta U = W + \Delta U = Q.$$

Tražena vrijednost adijabatske konstante je

$$\varkappa = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{1{,}6}{1} = 1{,}6$$

što približno odgovara jednoatomnim plinovima.

Dalibor Tužinski (2), Slav. Požega

[*Nap. ur.* Ispričavamo se za štamparsku grešku. Priznata su i rješenja sa 160!]

830. *Nuklearna elektrana je termodinamički stroj koji radi između temperature reaktora i temperature okoline koju obično predstavlja rijeka. Razmotrimo slučaj moderne nuklearne elektrane snage $P = 750000$ kW. Temperatura reaktora je $T_1 = 586$ K a temperatura rijeke $T_2 = 293$ K.*

a) *Kolika je maksimalna moguća efikasnost elektrane i kolika je minimalna količina topline koja se mora predati rijeci?*

b) *Ako je stvarna efikasnost elektrane 60% maksimalne, koliko se energije mora predati rijeci i za koliko će se povećati temperatura rijeke ako je protok 165 m³/s?*

a) Maksimalna efikasnost elektrane iznosi:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},\quad \eta = \frac{586 - 293}{586}$$

$$\eta = 0{,}5 \text{ odnosno } 50\%.$$

S obzirom da je

$$\Delta U = W + \Delta Q \quad \text{a} \quad W = 0{,}5\,\Delta U$$

to je minimalna količina topline koja se predaje rijeci:

$$\Delta Q = W$$

$$\Delta Q = 750000\ \mathrm{kWs/s} = 750 \cdot 10^6\ \mathrm{J/s}.$$

b) Stvarna efikasnost nuklearne elektrane iznosi:

$$\eta_s = \eta_1 \cdot \eta$$

$$\eta_s = 0{,}6 \cdot 0{,}5$$

$$\eta_s = 0{,}3$$

te je

$$W = 0{,}3\,\Delta U \Rightarrow \Delta U = \frac{W}{0{,}3}$$

$$\Delta U = W + \Delta Q_1$$

$$\frac{W}{0{,}3} = W + \Delta Q_1$$

$$\Delta Q_1 = \frac{0{,}7}{0{,}3} W$$

$$\Delta Q_1 = \frac{0{,}7}{0{,}3} \cdot 750000 \text{ kWs/s}$$

$$\Delta Q_1 = 1750000 \text{ kJ/s}.$$

Porast temperature rijeke iznosi:

$$\Delta T = \frac{\Delta Q}{m \cdot c}$$

$$\Delta T = \frac{1750000}{165 \cdot 4182} \text{ K} = 2{,}54 \text{ K}.$$

Josip Tambača, (2), Šibenik

831. *Predmet je udaljen od zastora za L. Između predmeta i zastora nalazi se leća, koja daje oštru sliku predmeta na zastoru i to za dva položaja leće koji su međusobno udaljeni za d. Kolika je žarišna daljina leće?*

Neka je udaljenost prvog položaja leće od zastora x, kao što je prikazano na slici. U jednadžbu leće

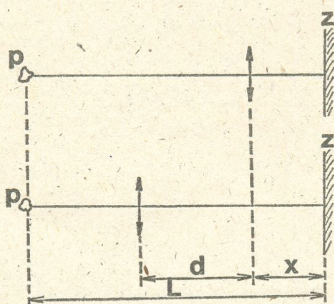
$$\frac{l}{f} = \frac{l}{a} + \frac{l}{b} \text{ tj. } f = \frac{ab}{a + b},$$

gdje je a udaljenost predmeta, a b udaljenost slike od leće, uvrstimo vrijednosti za svaki položaj posebno:

I $a = L - x, \quad b = x$

$$f = \frac{(L - x)\,x}{L - x + x}$$

$$f = \frac{(L - x)\,x}{L} \qquad (1)$$



II $a = L - x - d, \quad b = x + d$

$$f = \frac{(L - x - d)(x + d)}{L - x - d + x + d}$$

$$f = \frac{(L - x - d)(x + d)}{L} \qquad (2)$$

Izjednačimo f iz (1) i (2). Sređivanjem dobivamo

$$x = \frac{L - d}{2}. \qquad (3)$$

Uvrstimo (3) u (1):

$$f = \frac{\left(L - \frac{L - d}{2}\right)\frac{L - d}{2}}{L},$$

tj.

$$f = \frac{L^2 - d^2}{4L}.$$

Dalibor Paar (3), Zagreb

832. *Šišmiš leti prema stijeni brzinom* $v = 6$ m/s *pri čemu proizvodi ultrazvuk frekvencije* $f = 45\,160$ Hz. *Kolika je frekvencija ultrazvuka kojeg šišmiš prima? Uzeti da je brzina ultrazvuka* $c = 340$ m/s.

U ovom slučaju stijena se ponaša kao zvučni izvor frekvencije

$$f' = f \cdot \frac{c}{c - v},$$

a primljeni zvučni signal imaće frekvenciju

$$f_p = f' \cdot \frac{c + v}{c} = f \cdot \frac{c + v}{c - v},$$

jer se šišmiš (slušalac) približava zvučnom izvoru istom brzinom v.

$$f_p = 46\,160 \cdot \frac{340 + 6}{340 - 6} \text{ Hz} = 46\,782{,}5 \text{ Hz}.$$

Živomir Babić (3), Banja Luka

F) Rješenja iz matematike za ekonomsko usmjerenje

671. A *je primao prije tri godine* OD *u iznosu od* 30 000 *dinara mjesečno, a danas prima* 220 000 *dinara mjesečno. Koliki je prosječni godišnji postotak povećanja, ako se povećanje za svaku godinu računa od uvećane svote na kraju prethodne godine?* B *je primao prije tri godine* OD *u iznosu od* 37 000 *dinara mjesečno s time da mu je godišnji postotak povećanja iznosio* 55,83 *i za svaku godinu obračunat je od uvećanog iznosa na kraju prethodne godine. Za koliko* % *bi trebalo povećati sada primanja* B*-a da dosegne primanja koja sada ima* A?

Godišnji postotak povećanja dobiva se iz jednadžbe

$$220\,000 \cdot 12 = 30\,000 \cdot 12 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3.$$

Odavde je

$$\left(1 + \frac{100}{p}\right)^3 = \frac{22}{3}.$$

Logaritmiranjem dobivamo

$$\log\left(1 + \frac{p}{100}\right) = 0{,}28843$$

i

$$1 + \frac{p}{100} = 1{,}9428$$

pa je

$$p = 94{,}28.$$

Izračunajmo koliko danas prima B.

$$C_3 = 37\,000 \cdot 1{,}558^{33}.$$

Logaritmiranjem dobivamo

$$\log C_3 = 5{,}14615$$

odavde je

$$C_3 = 140\,006.$$

Traženi postotak možemo dobiti iz

$$\frac{12 \cdot 220\,000}{12 \cdot 140\,006} = 1{,}5714$$

pa je

$$p_1 = 57{,}14.$$

672. *U domaćinstvu se u jednom polugodištu potrošilo* 8 *litara sirupa od limuna i* 4 *litre sirupa od borovnice i platilo se ukupno* 4000 *dinara. Ako se cijena voćnog sirupa od limuna poveća za* 100 *dinara po* 1 *litri, a cijena sirupa od borovnice poveća za* 25% *po* 1 *litri, onda se ukupni izdaci za sirupe u domaćinstvu povećaju u narednom polugodištu za* 30% *uz uvjet da se troše iste količine sirupa kao i prije. Kolika je bila cijena* 1 *litre svakog sirupa prije poskupljenja?*

Označimo potrošenu količinu u litrama za sirup od limuna sa x, a za sirup od borovnice sa y. Tada je prema uvjetima zadatka

$$8x + 4y = 4000,$$

i poslije poskupljenja je

$$8 \cdot (x + 100) + 4 \cdot 1{,}25 = 5200.$$

Rješenje ovog sistema jednadžbi je

$$x = 300, \quad y = 400,$$

a to su i cijene po 1 litri u dinarima za sirup od limuna odnosno od borovnice prije poskupljenja.

673. *Netko podigne zajam od* 2 000 000 *dinara uz kamatnjak* $p = 25$ *godišnje dekurzivno i uz otplaćivanje anuiteta krajem svake godine.* a) *Za koliko* % *će se povećati anuiteti, ako se kamatnjak poveća za* 20% *prvotnog kamatnjaka, a ostali uvjeti otplaćivanja zajma ostaju isti?* b) *Da li* % *povećanja anuiteta u zadatku* a) *ovisi o iznosu zajma?*

a) Izračunajmo anuitet uz godišnji kamatnjak $p = 25$ pa je

$$a = 2\,000\,000 \cdot \frac{1{,}25^{10}(1{,}25 - 1)}{1{,}25^{10} - 1}.$$

Neka je $x = 1{,}25^{10}$. Odavde je

$$\log x = 0{,}96910$$

pa je $x = 9{,}3132$. Ovu vrijednost uvrstimo u izraz za anuitet pa je

$$a = 2\,000\,000 \cdot \frac{9{,}3132 \cdot 0{,}25}{8{,}3132} = 560\,145.$$

Izračunajmo anuitet ako je

$$p_1 = 25 + 20\% \cdot 25 = 30$$

pa je

$$a_1 = 2000\,000 \cdot \frac{1{,}3^{10}(1{,}30 - 1)}{1{,}3^{10} - 1}.$$

Neka je $y = 1{,}3^{10}$. Odavde je

$$\log y = 1{,}13940 \text{ i } y = 13{,}7848.$$

Ovu vrijednost uvrstimo u izraz za anuitet pa je

$$a_1 = 2\,000\,000 \cdot \frac{13{,}7848 \cdot 0{,}3}{12{,}7848} = 646\,931.$$

Izračunajmo

$$\frac{a_1}{a} = \frac{646931}{560145} = 1{,}15.$$

Traženi postotak povećanja anuiteta je 15. b) Ne.

674. *Za proizvodnju nekog proizvoda potrebne su sirovine* A, B, C, D *u omjeru* 50 : 7 : 11 : 15. *Ako ukupna količina sirovine* A *i* B *u proizvodnji u nekom razdoblju iznosi* 11 400 kg, *izračunajte potrebne količine sirovina* A, B, C, D *za to razdoblje.*

Označimo potrebne količine sirovina A, B, C, D sa x, y, z, u. Tada je

$$x : y : z : u = 50 : 7 : 11 : 15 \qquad (1)$$

i

$$x + y = 11\,400. \qquad (2)$$

Iz $x : y = 50 : 7$ izlazi

$$x = 50k \text{ i } y = 7k$$

što uvršteno u (2) daje

$$50k + 7k = 11\,400$$

pa je $k = 200$. Odavde je

$$x = 10000,\ y = 1400,\ z = 2200,$$

$$u = 3000$$

izraženo u kg.

675. *Ako je*

$$f(x) = 2x^2 - 6x + 4,$$

nađite $f(A)$ uz uvjet da je A kvadratna matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$f(A) = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - 6 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} +$$

$$+ 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 20 & 24 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 18 \\ 30 & 18 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 6 \\ 10 & 34 \end{bmatrix}.$$

ZANIMLJIVOSTI I RAZNO

28. savezno takmičenje iz matematike

Od 24. do 26. aprila 1987. godine Društvo matematičara, fizičara i astronoma SAP Vojvodine je u Titovom Vrbasu organizovalo 28. savezno takmičenje učenika srednjih škola iz matematike. Učenici, vođe puta i članovi Savezne komisije bili su smešteni u hotelu Bačka.

Na svečanom otvaranju takmičare je pozdravio *prof. Živojin Ćulum*, a odmah zatim u prostorijama SUBNOR-a i osnovne škole P. P. Njegoš održano je savezno takmičenje. Takmičari su zadatke rešavali 4,5 sata.

Posle ručka za takmičare je organizovana poseta ergeli »ZOBNATICA«, a komisija je pregledala njihove radove. Uveče su bili objavljeni nezvanični rezultati, posle kojih je sledilo drugarsko veče. Na hodnicima hotela čule su se gitare i pesma sve do ranog jutra, kad se na zasluženi odmor vratila i savezna komisija. Trebalo je naime pregledati žalbe, sastaviti zvanične rezultate i zbog izjednačenosti najboljih takmičara u III. i IV. razredu, izabrati još i zadatke za kvalifikaciono takmičenje za olimpijsku ekipu Jugoslavije.

Sledeći dan održana je takozvana mala olimpijada, a posle toga proglašeni su rezultati i podeljene nagrade i pohvale:

1. razred

I. nagrada: *Slepčević Dejan*, Apatin; *Šilović Miroslav*, Split

II. nagrada nije dodeljena

III. nagrada: *Božičević Miran*, Zagreb; *Babić Igor*, *Dundić Vanja*, obadvoje Beograd; *Žolt Gajdoš*, Novi Sad

Pohvale: *Bauer Andrej*, Ljubljana; *Kalinić Nataša*, Kladovo; *Mirjanić Mirjana*, Beograd; *Raić Martin*, Ljubljana

2. razred

I. nagrada: *Todorović Rade*, Pirot

II. nagrada nije dodeljena

III. nagrada: *Bandić Zvonimir*, Beograd; *Poljak Ljiljana*, Sinj

Pohvale: *Tužinski Dalibor*, Slavonska Požega; *Milošević Dragan*, Šabac; *Eraković Ivan*, Beograd; *Cimprič Jaka*, Ljubljana

3. razred

I. nagrada nije dodeljena

II. nagrada: *Kešelj Vlado*, Sarajevo; *Smiljanić Aleksandra*, Beograd

III. nagrada: *Stojković Dragan*, Niš; *Glišić Branko*, Valjevo; *Škretovski Riste*, Skopje

Pohvale: *Jovančević Aleksandar*, Čačak; *Črnja Zoran*, Rijeka; *Spasojević Mirjana*, Priština

4. razred

I. nagrada nije dodeljena

II. nagrada: *Janičić Predrag*, Priština

III. nagrada: *Poljak Joško*, Sinj; *Vasiljević Nebojša*, *Vladić Jovan*, *Milenković Olivera*, svi Beograd

Pohvale: *Aglić Andreja*, Split; *Šajna Mateja*, Nova Gorica.

Ove godine je Jugoslavija prvi put učestvovala pored olimpijade i na Balkanijadi. Tako je savezna komisija na temelju rezultata saveznog takmičenja i »male olimpijade« za put u Atinu i Havanu odredila sledeće takmičare:

Todorović Rade
Smiljanić Aleksandra
Kešelj Vlado
Milenković Olivera
Vasiljević Nebojša
Janičić Predrag.

Zadaci:

1. RAZRED

1. Dokazati da za nenegativne brojeve a i b važi nejednakost

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}.$$

2. Dat je trougao ABC sa tupim uglom kod temena A. Neka je $a = BC$, $b = CA$ i h_a, odnosno h_b, visine iz temena A, odnosno B. Dokazati da je

$$a + h_a > b + h_b.$$

3. Dat je prirodan broj n. Odrediti broj rešenja jednačine

$$x^2 - [x^2] = (x - [x])^2,$$

za koja je $1 \leqslant x \leqslant n$.
($[t]$ je najveći ceo broj, koji nije veći od t)

4. Svako teme kocke označeno je jednim od brojeva 1 ili -1, a na svakoj strani zapisan je proizvod brojeva kojima su označena četiri temena te strane. Da li zbir tako dobijenih 14 brojeva može biti jednak: a) 7, b) 0?

2. RAZRED

1. Dokazati da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva p, takvih da jednačina

$$x^2 + x + 1 = py,$$

po x i y, ima celobrojno rešenje.

2. Četvorougao $ABCD$ je upisan u krug, M je tačka preseka normala povučenih na AB u tački A i na CD u tački D, a N je tačka preseka normala povučenih na AB u tački B i na CD u tački C. Dokazati da se prave MN, AC i BD seku u jednoj tački.

3. Ako je u četvorougao moguće upisati kružnicu, dokazati:

a) Kružnice upisane u dva trougla, na koje jedna od dijagonala deli dati četvorougao dodiruju jedna drugu;

b) tačke dodira tih kružnica sa stranama datog četvorougla, su vrhovi tetivnog četvorougla.

4. Neka je $P(x)$ polinom sedmog stepena sa celim koeficijentima, takav da za sedam različitih celih brojeva ima vrednosti u skupu

$$\{-1,1\}.$$

Dokazati da se $P(x)$ ne može predstaviti u obliku proizvoda dva polinoma sa celim koeficijentima, tako da nijedan od njih nije konstanta.

3. i 4. RAZRED

1. Neka su $a_1, \ldots, a_n$ pozitivni realni brojevi takvi da je $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$. Dokazati da je

$$(4 + a_1)(4 + a_2) \ldots (4 + a_n) \geqslant 5^n.$$

2. Neka su a i m prirodni brojevi i x ceo broj, takav da m deli $a^2x - a$. Dokazati da postoji ceo broj y, takav da m deli brojeve $a^2y - a$ i $ay^2 - y$.

3. U prostoru je dato n tačaka takvih da bilo koje četiri obrazuju nedegenerisani tetraedar volumena ne većeg od 1. Dokazati da postoji tetraedar volumena ne većeg od 27 koji sadrži sve date tačke (u unutrašnjosti ili na stranama).

4. Neka je X skup svih konačnih nizova čiji su članovi brojevi 0 i 1 i $f\colon X \to X$ funkcija definisana uslovom: za $x \in X$, $f(x)$ dobijamo tako što u nizu x svaku jedinicu zamenimo sa 01 a svaku nulu sa 10. Koliko se parova 00 javlja u nizu

$$\underbrace{f(f \ldots (f}_{n \text{ puta}}(1)))?$$

Zadaci na »maloj olimpijadi« bili su:

1. Neka je

$$x_0 = a, \; x_1 = b$$

i

$$x_{n+1} = 2x_n - 9x_{n-1}, \; n > 1.$$

Odrediti potrebne i dovoljne uslove na a i b pri kojima postoji član datog niza koji je deljiv sa 7.

2. Neka je

$$f(x) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}\,x + \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{-\sqrt{2 - \sqrt{2}}\,x + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

Odrediti $\underbrace{f(f(\ldots(f}_{1987 \text{ puta}}(x))\ldots)$.

3. U prostoru su date prave a, b i c tako da makoje dve nisu međusobno paralelne i da postoje ravni α, β i γ, takve da važi

$$a \subseteq \alpha, \; b \subseteq \beta, \; c \subseteq \gamma,$$

$$\alpha \perp \beta, \; \beta \perp \gamma, \; \gamma \perp \alpha.$$

Konstruiraj presek ravni α, β, γ. (Konstrukcija u prostoru dozvoljava postavljanje proizvoljnih prava, ravni, sfera i translaciju za proizvoljan vektor.)

Član komisije
Aleksandar Jurišić

4. matematička balkanijada

Već četvrtu godinu za redom se održava natjecanje balkanskih zemalja u matematici na nivou srednje škole. U svijetu već postoje regionalna takmičenja sličnog tipa, kao npr. Ibero-američko (Južna Amerika i Španjolska). Poljska i Austrija imaju tradicionalne međusobne susrete sličnog tipa čiji cilj je, kao i za prije spomenuta takmičenja, priprema ekipa za natjecanje na Olimpijadi.

Ideju za održavanje matematičke balkanijade začele su Grčka i Bugarska. Ove godine je

(po drugi put) natjecanje održano u Grčkoj, gdje je pored Bugarske, Rumunjske, Grčke i Cipra po prvi puta učestvovala i Jugoslavija. Turska nije bila pozvana iz političkih razloga.

Organizatori su nam priredili u toku boravka u Ateni (od 3. do 8. svibnja 1987) bogat kulturno-umjetnički program u kojem je bilo posjećeno nekoliko muzeja. Jedna srednja škola nam je priredila veoma lijep muzički i dramski program. Bio je organiziran i jednodnevni izlet u kojem su razgledani neki od značajnih povijesnih lokaliteta na Peloponezu. Učenici su imali idealne uvjete za međusobno upoznavanje, jer je smještaj bio u Olimpijskom selu pored novog stadiona.

Zadaci su bili nešto lakši nego prijašnjih godina. Rumunjska ekipa je bila apsolutno superiorna osvojivši sve moguće bodove, drugo mjesto je pripalo Bugarskoj, a zatim slijede Jugoslavija i Cipar. Spomenuo bih da je rumunjsku ekipu vodio jedan od vrhunskih svjetskih matematičara *prof. O. Stanašila.*

Mislim da možemo biti zadovoljni uspjehom naše ekipe. *Rade Todorović* (2. r., Pirot) i *Vlado Kešelj* (3. r., Sarajevo) osvojili su prvu nagradu, *Nebojša Vasiljević* (4. r., Beograd) i *Predrag Janičić* (4. r., Priština) drugu, te *Olivera Milenković* (4. r., Beograd) i *Aleksandra Smiljanić* (3. r., Beograd) treću nagradu. Istaknuti valja Radu Todorovića koji je riješio sve zadatke. Ekipu su vodili asistenti *Nenad Antonić* (PMF, Zagreb) i *Darko Žubrinić* (ETF, Zagreb).

Spomenuli bismo i to da je za Rumunjsku i Bugarsku ovo natjecanje samo jedna od stepenica za formiranje najjače ekipe koja se odabire iz šireg kruga kandidata (oko 20), te su se kasnije na Međunarodnoj olimpijadi pojavile u nešto drugačijem sastavu.

Slijedeće (1988) godine će se Balkanijada održati na Cipru.

Zadaci

na ovoj 4. **MBO** (u Ateni) bili **su**

1. Neka je $a \in R$ i $f: R \to R$ funkcija takva da vrijedi

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(a-y) +$$
$$+ f(y) \cdot f(a-x), \ \forall x, y \in R$$
$$f(0) = 1/2.$$

Dokaži da je f konstanta. (Zadala Jugoslavija)

2. Neka su $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$ takvi da su

$$a = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}$$
$$b = \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}$$

neuzastopni cijeli brojevi. Dokažite da je $b = a + 2$ i $x = y = 5/4$. (Rumunija)

3. U trokutu ABC vrijedi

$$\sin^{23}\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^{48}\frac{\beta}{2} = \sin^{23}\frac{\beta}{2} \cdot \cos^{48}\frac{\alpha}{2},$$

kod čega su α i β kutovi s vrhovina A, odnosno B. Izračunaj omjer AC/BC. (Cipar)

4. Dvije kružnice k_1 i k_2 sa središtima O_1, O_2 iradijusima 1, odnosno $\sqrt{2}$, sijeku se u dvije točke A i B i $O_1O_2 = 2$. Neka je AC tetiva na k_2. Nađi duljinu od AC, ako polovište od AC leži na k_1. (Bugarska)

Kao informaciju (i poticaj za rješavanje) objavljujemo zadatke sa dosadašnjih balkanskih matematičkih olimpijada:

1. BMO (1984, Atena)

1. Neka su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ pozitivni realni brojevi, ($n \geqslant 2$) takvi da je $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$. Pokaži da je

$$\frac{\alpha_1}{1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdot + \alpha_n} +$$
$$+ \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_1 + \alpha_3 + \cdot + \alpha_n} + \ldots +$$
$$+ \frac{\alpha_n}{1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdot + \alpha_{n-1}} \geqslant \frac{n}{2n-1}$$

(Grčka)

2. Neka je $A_1A_2A_3A_4$ tetivni četverokut i neka su H_1, H_2, H_3 i H_4 sjecišta visina trokutova $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$ i $A_1A_2A_3$ redom. Dokaži da su četverokuti $A_1A_2A_3A_4$ i $H_1H_2H_3H_4$ kongruentni.

(Rumunija)

3. Pokaži da za svaki prirodan broj m postoji prirodan broj n, $n > m$, takav da se decimalni prikaz broja 5^n dobije dodavanjem nekih znamenaka slijeva decimalnom prikazu broja 5^m.

(Bugarska)

4. Nađi sva realna rješenja sustava

$$ax + by = (x-y)^2$$
$$by + cz = (y-z)^2$$
$$cz + ax = (z-x)^2$$

kod čega su a, b, c tri fiksna pozitivna realna broja. (Rumunija)

2. BMO (1985, Sofija)

1. Neka je O središte kružnice opisane trokutu ABC, D polovište dužine AB i E težište trokuta ACD.

Dokaži da je $CD \perp OE \Leftrightarrow AB = AC$.

(Bugarska)

2. Neka su $a, b, c, d \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ brojevi za koje vrijedi

$$\sin a + \sin b + \sin c + \sin d = 1$$

i

$$\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c + \cos 2d \geqslant \frac{10}{3}.$$

Dokaži da su $a, b, c, d \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$.

(Rumunija)

3. Realne točke oblika $19a + 85b$ gdje su $a, b \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ obojene su crveno, dok su sve druge cjelobrojne točke obojene zeleno. Ispitaj da li postoji $A \in R$ takav da je za svaki par $(B, C) \in Z \times Z$, kod čega su B i C simetrični s obzirom na A, B obojeno različito od C. (Grčka)

4. 1985 ljudi sudjeluje na nekom kongresu. U svakoj grupi od tri čovjeka postoje bar dvojica koji govore isti jezik. Ako svaka osoba govori najviše pet jezika, pokaži da postoji bar 200 ljudi na ovom kongresu koji govore isti jezik. (Rumunija)

3. BMO (1986, Bukurešt)

1. Pravac prolazi kroz središte I kruga upisanog trokutu ABC i siječe tom trokutu opisani krug u točkama F i G, te upisani krug u točkama D i E, kod čega D leži između I i F.

Dokaži da je $DF \cdot EG \geqslant r^2$, kod čega r označava radijus kruga upisanog trokutu ABC. Kada vrijedi jednakost? (Grčka)

2. Neka je $ABCD$ tetraedar i E, F, G, H, K, L šest točaka na bridovima AB, BC, CA, DA, BD, DC redom.

Dokaži da ako je $AE \cdot BE = BF \cdot CF = CG \cdot AG = DH \cdot AH = DK \cdot BK = DL \cdot CL$ da tada točke E, F, G, H, K, L leže na jednoj sferi. (Bugarska)

3. Niz $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ definiran je s $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_{n+1} = (a^2 + c)/a_{n-1}$ za $n = 2, 3, \ldots$, kod čega su a, b, c realni brojevi, $ab \neq 0$, $c > 0$.

Dokaži da su svi a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ cijeli brojevi ako i samo ako su brojevi a, b i $(a^2 + b^2 + c)/ab$ cijeli. (Bugarska)

4. Trokut ABC ima svojstvo da postoji točka P u njegovoj ravnini takva da trokuti PAB, PBC, PCA imaju isti opseg i istu površinu. Dokaži da

a) ako je P u nutrini trokuta ABC, tada je ABC jednakostraničan

b) ako P nije u nutrini trokuta ABC, tada je ABC pravokutan. (Rumunija)

Darko Žubrinić
Uroš Milutinović

28. međunarodna matematička olimpijada

Ove je godine (od 5. do 16. VII. 1987) održana u Havani na Kubi Međunarodna matematička olimpijada, koja je postavila mnoge rekorde i koja je po mnogo čemu bila jedinstvena. Po prvi puta održana je u Latinskoj Americi, po drugi puta izvan Evrope — do sada je jedini izuzetak bila Olimpijada u Vašingtonu 1981. godine. Sudjelovao je najveći broj zemalja i najveći broj takmičara, što dokazuje da je matematički olimpijski pokret u stalnom usponu. Izuzetna je bila i po toplini klime i toplini ljudi — domaćini su uložili ogromne napore, mnogo volje, rada i sredstava i uspjeli sve organizirati besprijekorno.



Za nas je ova Olimpijada izuzetna i po tome što se ponovo, nakon nekoliko sušnih godina, možemo pohvaliti drugom nagradom. Osim toga naša ekipa je osvojila i tri treće nagrašde, a i nagrađeni takmičari bili su vrlo blizu osvajanja nagrade, tako da je cijela ekipa osvojila čak (za naše uvjete dobra) 132 boda.

Na Olimpijadi je sudjelovalo 237 takmičara iz 42 zemlje. Kao što se zadnjih godina ustalilo, ekipe su imale po 6 takmičara, osim ekipa Italije, Islanda, Luksemburga, Meksika, Poljske i Urugvaja, koje su iz raznih razloga nastupile nepotpune. Po prvi puta su nastupile ekipe Irana, Meksika, Nikaragve, Paname, Perua i Urugvaja (za ekipu Irana možemo smatrati da je nastupila prvi puta, jer je jednočlanu iransku ekipu na Olimpijadi u Finskoj 1985. godine uputila Francuska!).

Većina tih zemalja su bez iskustva u održavanju matematičkih natjecanja — otuda i njihov slab uspjeh — i upravo njihovo uključivanje u olimpijski pokret poslužit će kao snažan podstrek takmičenjima i razvoju matematike uopće u tim zemljama (kao što se je ranije dogodilo sa npr. arapskim zemljama). Od ranijih sudionika ove godine ekipe nisu uputili Izrael i Tunis.

Članovi naše ekipe bili su:

Predrag Janičić (4. raz., Priština)
Vlado Kešelj (3. raz., Sarajevo)
Olivera Milenković (4. raz., Beograd)
Aleksandra Smiljanić (3. raz., Beograd)
Rade Todorović (2. raz., Pirot)
Nebojša Vasiljević (4. raz., Beograd),



Sjede, slijeva: Žubrinić, *Milenković*, *Vasiljević*, Milutinović, *Todorović*; čuče, slijeva: *Janičić*, *Smiljanić*, *Kešelj*.
(Snimljeno u Pragu, na povratku)

a rukovodioci *mr. Uroš Milutinović* (asistent Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu) i *dr. Darko Žubrinić* (asistent Elektrotehničkog fakulteta u Zagrebu). Neposredno prije Olimpijade Društvo matematičara i fizičara SRH organiziralo je jednotjedne pripreme u Pionirskom gradu u Zagrebu.

Zbog visine troškova puta i priprema dobro je došla ove godine uspostavljena suradnja Društva sa »Rade Končarom« iz Zagreba.

Ove godine je i put na mjesto natjecanja bio zanimljiv — i na odlasku i na povratku ekipa je provela po jedan dan u Pragu.

Boravak na Kubi je, naravno, također bio izuzetno zanimljiv, jer su se domaćini trudili da nas što bolje upoznaju sa svojom zemljom bujne prirode i srdačnih i osebujnih ljudi. Ne treba ni spominjati da su i gosti dali sve od sebe da iskoriste priliku, upoznaju zemlju i sklope prijateljstva. Od brojnih izleta izdvojio bih posjete muzeju E. Hemingwaya, botaničkom vrtu i parku Lenjin, kupanje na 9 km dugim pješčanim plažama Santa Maria del Mar i Hermosa, put do vidikovca Escaleras de Jaruco, (sve u okolici Havane), te cjelodnevni izlet do plaže Giron u Zaljevu svinja.

Samo takmičenje održano je 10. i 11. VII. Svaki dan takmičari su 4,5 sata rješavali po 3 zadatka, svaki od kojih je vrijedio 7 bodova. Ispostavilo se da su mnogima zadaci prelagani — čak 22 takmičara dobilo je maksimalan broj bodova, zbog čega se ove godine prva nagrada dobivala samo za osvojena 42 boda. I granice za drugu i treću nagradu bile su više nego ranijih godina: za treću od 18 do 31 bod, za drugu od 32 do 41 bod. Osim toga, neke ekipe (Rumunjska, SR Njemačka) su cijele izgubile tek po koji bod! S druge strane, mnoge ekipe su imale teškoća s tim da uopće dobiju ijednu nagradu, a neke i s tim da uopće dobiju koji bod, tako da će izbor zadataka na Olimpijadi vjerojatno ubuduće predstavljati sve veći problem.

I ove je godine miljenik sudionika Olimpijade bio Australijanac *Terence Tao*, koji je odustao od upisa u fakultet da bi mogao još jednom nastupiti na Olimpijadi. Ove godine bio je još uspješniji nego lani, osvojio je 40 bodova i, na žalost, samo drugu nagradu. Odustajanje od studija neće mu teško pasti jer ima samo 12 godina, a predavanja na fakultetu ionako posjećuje, neobavezno.

Navedimo rang listu (neslužbenu; jer se službeno računa samo pojedinačni uspjeh takmičara):

RANG LISTA

	nagrade I	II	III	broj bodova
1. Rumunjska	5	1	—	250
2. SR Njemačka	4	2	—	248
3. SSSR	3	3	—	235
3. DR Njemačka	2	3	1	231
5. SAD	2	3	1	220
6. Mađarska	—	5	1	218

7.	Bugarska	1	3	2	210
8.	Kina	2	2	2	200
9.	Čehoslovačka	—	4	2	192
10.	Velika Britanija	1	2	2	182
11.	Vijetnam	—	1	5	172
12.	Francuska	—	3	2	154
13.	Austrija	—	2	3	150
14.	Nizozemska	—	1	4	146
15.	Australija	—	3	—	143
16.	Kanada	1	1	1	139
17.	Švedska	—	2	2	134
18.	Jugoslavija	—	1	3	132
19.	Brazil	1	—	2	116
20.	Grčka	—	—	4	111
21.	Turska	—	—	2	94
22.	Španjolska	—	—	3	91
23.	Maroko	—	—	3	88
24.	Kuba	—	—	2	83
25.	Belgija	—	—	1	74
26.	Iran	—	1	1	70
27.	Norveška	—	—	—	69
28.	Finska	—	—	2	69
29.	Kolumbija	—	—	1	68
30.	Mongolija	—	—	—	67
31.	Poljska (3)	—	—	2	55
32.	Island (4)	—	—	—	45
33.	Cipar	—	—	—	42
34.	Peru	—	—	—	41
35.	Italija (4)	—	—	1	35
36.	Alžir	—	—	—	29
37.	Kuvajt	—	—	—	28
38.	Luksemburg (1)	—	—	1	27
39.	Urugvaj (4)	—	—	—	27
40.	Meksiko (5)	—	—	—	17
41.	Nikaragva	—	—	—	13
42.	Panama	—	—	—	7

(U zagradama uz imena zemalja naveden je broj članova ekipe, ukoliko su one bile nepotpune.)

Kada govorimo o pojedinačnom uspjehu, navedimo rezultate naših takmičara: *R. Todorović* osvojio je drugu nagradu, a *V. Kešelj*, *A. Smiljanić* i *N. Vasiljević* treće nagrade. Po zadacima: naša ekipa uspjela je dobiti 35 bodova za drugi zadatak, 30 za prvi, 29 za peti, 21 za četvrti, 16 za treći i samo 1 bod za šesti zadatak, koji se iskazao kao pravi tvrdi orah i bio najteži i drugim takmičarima. Ukupno su svi takmičari na prvom zadatku osvojili 821 poen, drugom 1115 poena, na trećem 505, na četvrtom 841, na petom 1006 i na šestom 427 poena.

Slijedeća, 29. međunarodna matematička olimpijada održat će se 1988. godine u Canberi (Australija) u sklopu proslave 200. godišnjice doseljavanja Evropljana u Australiju.

Zadaci

1. Neka je $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Označimo sa $p_n(k)$ broj permutacija skupa S_n koje imaju točno k fiksnih točaka ($k \geqslant 0$, $n \geqslant 1$). Dokaži da je

$$\sum_{k=0}^{n} k p_n(k) = n!$$

Napomena: Permutacija skupa S_n je bijekcija sa skupa S_n na samog sebe. Kažemo da je j fiksna točka permutacije f ako je $f(j) = j$.

2. Kroz vrh A oštrokutnog trokuta ABC povučena je simetrala kuta, koja siječe stranicu BC u točki L, a kružnicu opisanu trokutu ABC u točkama A i N. Iz L su na AB (odnosno AC) spuštene okomice LK (odnosno LM) (kod čega je $K \in AB$, $M \in AC$). Dokaži da je površina četverokuta $AKNM$ jednaka površini trokuta ABC.

3. Neka su $x_1, x_2, \dots, x_n$ realni brojevi za koje je $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x^2 = 1$. Dokaži da za svaki prirodan broj $k \geqslant 2$ postoje cijeli brojevi $a_1, a_2, \dots, a_n$ koji nisu svi jednaki 0 takvi da vrijedi

$$|a_i| \leqslant k - 1 \quad \text{za } i = 1, \dots, n$$

i

$$|a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n| \leqslant \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}.$$

4. Dokaži da ne postoji funkcija $f\colon N_0 \to N_0$ za koju je $f(f(n)) = n + 1987$ za svaki $n \in N_0 \cdot (N_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\})$.

5. Dokaži da za svaki prirodan broj $n \geqslant 3$ u ravnini postoji n točaka takvih da je

a) udaljenost između bilo koje dvije točke iracionalna, i

b) svake tri točke određuju nedegenerirani trokut (tj. nekolinearne su) i taj trokut ima racionalnu površinu.

6. Dan je prirodan broj $n, n \geqslant 2$. Dokaži da ako je broj $k^2 + k + n$ prost za svaki cijeli broj k koji zadovoljava $0 \leqslant k \leqslant \sqrt{\frac{n}{3}}$, da je tada $k^2 + k + n$ prost za svaki cijeli broj k takav da je $0 \leqslant k \leqslant n - 2$.

Uroš Milutinović

Ljetna škola mladih matematičara SR Bosne i Hercegovine

Treća ljetna škola mladih matematičara, učenika srednjeg usmjerenog obrazovanja i vaspitanja SR BiH održana je i ove godine u Trebinju od 3. 08. do 8. 08. 1987. godine. Školu je organizovalo Društvo matematičara, fizičara i astronoma SR BiH, Podružnica DMFA iz Trebinja i RO Školski centar iz Trebinja. Učenici su svakog dana slušali po pet časova predavanja, a nakon predavanja su dobijali po 5—6 zadataka (problema) za rješavanje. Ti zadaci su rješavani u poslijepodnevnim satima, a naveče se vodila diskusija o rješenjima. Evo nekih od tih zadataka koji će možda biti i od koristi čitaocima Matematičko-fizičkog lista:

1. Dokazati nejednakost

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \geqslant 1 + \sin\frac{A}{2} + \\ + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2},$$

gdje su A, B, C uglovi trougla.

2. Dokazati nejednakost

$$p_3^2 + 5p_2^3 \geqslant 6p_1p_2p_3,$$

gdje su

$$p_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

$$p_2 = \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{3},$$

$$p_3 = x_1x_2x_3; \ (x_1, x_2, x_3 \in R^+).$$

Važi jednakost ako i samo ako je

$$x_1 = x_2 = x_3.$$

3. Naći sve parove (m, n) cijelih brojeva takvih da je

$$1 \leqslant m \leqslant n, \ m^2 \equiv -1 \ (\text{mod } n),$$

$$n^2 \equiv -1 \ (\text{mod } m).$$

4. U trouglu ABC tačka Q je na pravcu BA, tačka R je na pravcu CB i $BQ = CR = AC$. Pravac kroz R paralelan AC siječe CQ u tački T, a pravac kroz T paralelan sa BC siječe AC u tački S. Pokaži da je

$$(AC)^3 = AQ \cdot BC \cdot CS.$$

Naravno, u poslijepodnevnim i večernjim satima bilo je dosta vremena za odmor, kupanje u gradskom bazenu, odlazak na izlete u Dubrovnik (udaljen je od Trebinja samo 25 km) i međusobno druženje i pjesmu. Učesnici su bili smješteni u hotelu »Leotar«, a nastava se i ovaj put izvodila u lijepoj maloj sali RO »Hidroelektrane na Trebišnjici« koja se nalazi u neposrednoj blizini hotela. Školu je kao gost posjetio matematičar iz Vršca, *prof. Zdravko Starc* — veliki zaljubljenik u matematiku i entuzijast. Rukovodilac škole je bio *mr Šefket Arslanagić*, profesor iz Trebinja, a njegov pomoćnik *Mesud Šečić*, profesor iz Bugojna. Svakako, najpopularnija osoba tih dana rada Škole je bio učenik *Vlado Kešelj*, učenik III razreda matematičko-fizičko-računarske struke u Gimnaziji »Ognjen Prica« u Sarajevu. Naime, Vlado je ovog ljeta bio član naše ekipe na 28. međunarodnoj matematičkoj olimpijadi koja je održana u Havani. Osvojio je III nagradu što je stvarno izuzetan uspjeh. Recimo i to dá je on kao član naše ekipe osvojio I nagradu i na Balkanijadi koja je održana ove godine u Ateni. Još jednom čestitamo Vladi.

Predavači su bili *dr Mustafa Kulenović* i *dr Jusuf Alajbegović* sa Prirodno-matematičkog fakulteta iz Sarajeva, *mr Šefket Arslanagić* i *mr Radosav Milošević* — profesori iz Trebinja, *Dragoljub Milošević* iz Pranjana i *Mesud Šečić* iz Bugojna. I *Vlado Kešelj* pojavio se u ulozi predavača.

Program je bio slijedeći:

Mustafa Kulenović:

Rekurzivne relacije — Linearne i nelinearne diferencne jednačine (9 časova),

Jusuf Alajbegović:

Uvod u nekomutativnu algebru. Hiperkompleksni brojevi (9 časova).

Šefket Arslanagić:

Primjena kompleksnih brojeva u trigonometriji (2 časa),

Teži konstruktivni zadaci o trouglu (2 časa).

Dragoljub Milošević:

Čevina teorema i njena primjena (2 časa),

Ptolemejeva teorema i njena primjena (2 časa).

Mesud Šečić:

Funkcionalne jednačine i grupe (2 časa).

Radoslav Milošević:

Neke matematičke zanimljivosti (2 časa).

Vlado Kešelj:

Prezentacija zadataka i nekih rješenja sa 28. međunarodne matematičke olimpijade u Havani (2 časa).

Dakle, ukupno je bilo 7 predavača, a obrađeno je 9 tema. U radu Škole je učestvovalo 29 učenika, a među njima i ovi nagrađivani i pohvaljivani učenici sa raznih republičkih i saveznih takmičenja: *Vlado Kešelj* (3), Sarajevo; *Aleksandar Jocić* (3) Foča; *Dejan Bašić* (3) Trebinje; *Davidović Darko* (3) Sarajevo; *Cigić Elizabeta* (1), Vlasenica; *Ćerimagić Fehim* (1), Foča.

Prava je šteta što nisu došli neki učenici — dobri matematičari iz Tuzle i Banja Luke. Njihovi profesori i direktori trebali bi pokazati više brige i interesa. Opšti je zaključak svih koji su se našli u Trebinju dá je Škola u potpunosti uspjela i da je od ogromne koristi za učenike i njihovo dalje matematičko obrazovanje. Nadležni u SR BiH (SSO, SSRN, Akademija nauka i umjetnosti i ostali) bi po opštem mišljenju trebali i morali pomoći ovu Školu i time doprinijeti da se ona podigne na još veći nivo — kvantitativno (broj učesnika i predavača) i naravno kvalitativno.

mr Šefket Arslanagić

Mladenov peti član niza

Profesor je napisao na ploču:

1, 16, 81, 256, ...

i zatražio od učenika da pripišu peti član niza. Čitav razred je napisao **625,** osim Mladena koji je napisao **601.**

Mladen je odličan matematičar. Da li se ovaj put zabunio?

Nije se zabunio! Evo zašto. Svi u razredu, osim Mladena, rasuđivali su ovako: $a_1 = 1 = 1^4$, $a_2 = 16 = 2^4$, $a_3 = 81 = 3^4$, $a_4 = 256 = 4^4$, dakle je opći član $a_n = n^4$, a peti član je $a_5 = 5^4 = 625$. Mladen je za opći član uzeo

$$a_n = 10n^3 - 35n^2 + 50n - 24.$$

Uvrštavanje daje:

$$a_1 = 10 - 35 + 50 - 24 = 1,$$

$$a_2 = 10 \cdot 8 - 35 \cdot 4 + 50 \cdot 2 - 24 = 80 - 140 + 100 - 24 = 16,$$

$$a_3 = 10 \cdot 27 - 35 \cdot 9 + 50 \cdot 3 - 24 = 270 - 315 + 150 - 24 = 81,$$

$$a_4 = 10 \cdot 64 - 35 \cdot 16 + 50 \cdot 4 - 24 = 640 - 560 + 200 - 24 = 256,$$

što se slaže s profesorovim zapisom na ploči. Da vidimo što je Mladen dalje dobio:

$$a_5 = 10 \cdot 5^3 - 35 \cdot 5^2 + 50 \cdot 5 - 24 = 10 \cdot 125 - 35 \cdot 25 + 50 \cdot 5 - 24 = 1250 - 875 + 250 - 24 = 601.$$

Možda će netko Mladena smatrati za »bijelu vranu« razreda. (Na nekom kvizu odgovor mu ne bi bio priznat!) Ipak: Strogo uzevši, golo puko davanje nekoliko prvih članova niza ne definira jednoznačno taj niz, odnosno njegov opći član. U stvari postoji *bezbroj* mogućnosti za daljnje članove (ovdje za peti, ... član). Druga je stvar, što se može smatrati da je većina u razredu postupala »prirodnije«.

Evo još jedan primjer. Koji je šesti član niza

$$\frac{2}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{10}, \frac{5}{17}, \frac{6}{26}, \ldots ?$$

»Prirodno« je odgovoriti: $a_6 = \frac{7}{37}$ $\left(\text{po formuli } a_n = \frac{n+1}{n^2+1}\right)$. Međutim, opći član može glasiti i

$$a_n = \frac{37k - 7}{4440} \cdot (n-1)(n-2)(n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5) + \frac{n+1}{n^2+1} \quad (k \text{ proizvoljna konstanta})!!$$

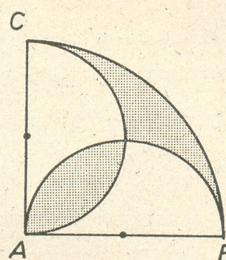
Za $n = 1, 2, 3, 4, 5$ dobivaju se gornji brojevi, a za $n = 6$ izlazi $a_6 = k$.

M. K.

Nekoliko zanimljivih matematičkih zadataka

149. Pri deljenju broja $2 \cdot 3 = 6$ brojem 4 dobija se kao ostatak 2, pri deljenju broja $3 \cdot 4 = 12$ brojem 5 dobija se opet ostatak 2. Da li će uvek ostatak deljenja proizvoda dva uzastopna prirodna broja brojem koji im sleduje biti 2?

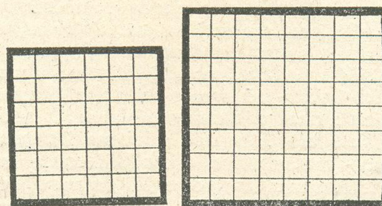
150. Na poluprečnicima četvrtine kruga konstruisani su polukrugovi. Šta je veće: osenčeni



zajednički deo ovih polukrugova, ili ona druga osenčena figura?

151. Tri muža (Ivan, Petar i Aleksandar) i tri žene (Marija, Katarina i Ana) izvršili su različite kupovine na sledeći način: svaka od ovih osoba platila je za svaki kupljeni predmet onoliko rubalja koliko je predmeta kupila. Sem toga se zna da je svaki muž isplatio po 48 rubalja više nego njegova žena, da je Ivan kupio 9 predmeta više nego Katarina, a da je Petar kupio 7 predmeta više nego Marija. Odredite čiji je muž Ivan, čiji Petar a čiji Aleksandar i koliko je ko predmeta kupio.

152. Kako se može od dva kvadrata, predstavljena na slici, dobiti jedan kvadrat, a da se svaki od njih prethodno preseče samo na

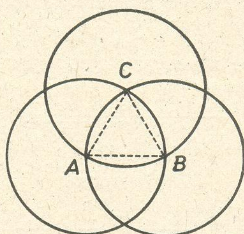


dva dela, s tim da se ne preseče ni jedno njihovo polje?

Rešenja iz prošlog broja (1/152)

145. Ti brojevi su $\frac{1}{2}$ i -1.

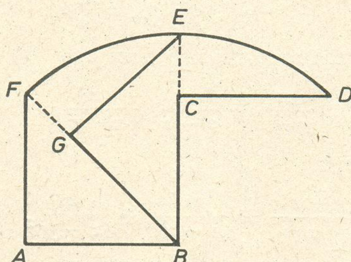
146. Površina figure ograničene lucima AB, BC i CA iznosi $P_1 \approx 0{,}705r^2$, a površina



četvrtine kruga je $P_2 \approx 0{,}785r^2$. Prema tome je $P_1 < P_2$.

147. Neka je šestocifreni broj A, a njegova prva cifra neka je a. Ako mu se oduzme prva cifra, dobijeni broj je $A - 100\,000a$. Broj koji se zatim dobije biće $10\,(A - 100000a) + a$ ili $10A - 999999a$. Ali $999999 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 27$. Prema tome, ako je A deljivo s bilo kojim od navedenih činilaca, njime će biti deljiv i novi broj.

148. Treba konstruirati duži BF i $EG \perp BF$ pa datu figuru raseći po izlomljenoj liniji BGE. U tom slučaju figura $BCDEG$ sastojaće se od trougla BGE i polovine kružnog odsečka



CDE, a figura $ABGEF$ od trougla $\triangle BAF \cong \triangle BGE$ i polovine kružnog odsečka GEF, podudarnog polovini kružnog odsečka CDE.

P. D.

Da li znate?

4. Kako se zvala prva žena poznati matematičar, kad je živela i kako je završila svoj život?

5. Po čemu je poznat škotski matematičar *Robert Simson* (1687—1768), a po čemu engleski matematičar *Tomas Simpson* (1710—1761)?

6. Šta su transcendentni brojevi?

Odgovori

4. Prva žena o kojoj se zna da se bavila matematikom bila je *Hipatija* (370—415), kći Teona aleksandrijskog. Potpomognuta od oca, ona se rano upoznala sa delima Euklida, Apolonija i Ptolemeja i predavala je matematiku na Muzeumu, tadašnjoj najvišoj školi u Aleksandriji.

Kraj joj je bio tragičan. Aleksandrija je tada pripadala Vizantiji, u kojoj je još 313. godine hrišćanstvo bilo proglašeno za državnu veru. Ali Hipatija, kao i čitav krug tadašnjih grčkih naučnika, nije htela da prihvati hrišćansku veru. I, jednoga dana, kada je pošla u Muzeum, nju je napala fanatizovana gomila hrišćana, kamenovala je, rastrgla na komade i spalila na lomači.

5. Matematičar *Robert Simson* poznat je po tzv. »*Simsonovoj pravoj*«. Dokazao je da podnožja normala, spuštenih na stranice datog trougla iz proizvoljne tačke kružnice, opisane oko tog trougla, leže na istoj pravoj. Taj je stav, međutim, već pre njega utvrdio matematičar Valis. [Vidi članak *D. Živanovića* u MFL 3/146.]

Matematičar *Tomas Simpson* najviše je poznat po tzv. »*Simpsonovoj formuli*«, koja se odnosi na tačno ili približno izračunavanje zapremine tela ograničenog s dve paralelne osnove, a koja glasi

$$V = \frac{h}{6}\,(Q_d + 4Q_s + Q_g)$$

gde h predstavlja odstojanje dvaju osnova, a Q_d, Q_s i Q_g predstavljaju površinu donje osnove, površinu srednjeg preseka i površinu gornje osnove. Obrazac je bio poznat i pre nego što ga je Simpson samostalno otkrio. [Vidi članak *M. Sevdića* u MFL, IX. god., str. 73 i 110.]

6. Transcendentan broj je onaj broj koji ne može biti koren algebarske jednačine s celim koeficijentima. Takav broj je, npr. π. Transcendentnost broja π dokazao je tek 1882. god. nemački matematičar *F. Lindeman* i time konačno razrešio pitanje mogućnosti konstrukcije (šestarom i lenjirom) kvadrata koji ima površinu jednaku površini datog kruga (tj. pitanje »kvadrature kruga«). Naime, iz okolnosti da π ne može biti koren nijedne algebarske jednačine s celim koeficijentima neposredno se izvodi da je pomenuta konstrukcija nemoguća.

P. D. — M. K.

XXX натпревар по математика во Македонија

Натпреварот по математика за учениците од средните училишта во СР Македонија се одржа на 28. 03. 1987 година во просто-

те на училиштетот »Гуро Салај« во Битола. На натпреварот учествуваа 121 ученик: 42 од I клас, 24 — II клас, 39 — III клас и 16 од IV клас.

Наградени беа 10, а пофалени 19 ученици:

I награда

Не беше доделена

II награда

1. *Пејчинов Зоран*, II клас, »Раде Јовчевски-Корчагин«, Скопје
2. *Шкрековски Ристе*, III клас, »Јосип Броз-Тито«, Кавадарци

III награда

1. *Матковска Катерина*, I клас, »Јане Сандански«, Струмица
2. *Наневски Александар*, I клас, »Раде Јовчевски-Корчагин«, Скопје
3. *Граматиков Игор*, I клас, »Раде Јовчевски-Корчагин«, Скопје
4. *Трајковиќ Владимир*, II клас, »Јосип Броз-Тито«, Кавадарци
5. *Најдов Љупчо*, IV клас, »Коле Неделковски«, Титов Велес
6. *Атанасов Ристе*, III клас, »Јосип Броз-Тито«, Кавадарци
7. *Јосифовски Љтбомир*, IV клас, »Раде Јовчевски-Корчагин«, Скопје
8. *Илиевска Адријана*, IV клас, »Гоце Делчев«, Куманово

Пофалени

I клас: *Јакимовски Гоце* — Охрид, *Митревска Рената* — Битола, *Радевски Драган* — Скопје, *Спиров Кристијан* — Скопје

II клас: *Петровски Милан* — Скопје, *Илиев Драган* — Куманово, *Галевски Марјан* — Битола, *Георгиевска Светлана* — Крива Паланка

III клас: *Трпкоски Перица* — Тетово, *Нешковиќ Владимир* — Скопје, *Анастасов Горан* — Скопје, *Радевски Ивица* — Куманово, *Туцаровски Стојанчо* — Скопје, *Јосифовски Вања* — Скопје

IV клас: *Тодоровски Љупчо* — Битола, *Манчев Марјан* — Кавадарци, *Витанова Софче* — Струмица, *Томовски Живорад* — Тетово

Задачи

I-1. Докажи дека при каков и да е избор на знаците »+« и »—« помеѓу броевите

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}$$

добиената сума ќе биде различна од нула.

I-2. Во рамнината се дадени три еднакви по должина отсечки $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ при што точката B лежи во внатрешноста на помалиот агол AOC. Тие се дијаметри на три кружници кои освен во точката O, се сечат и во точките A_1, B_1 и C_1. Докажи дека плоштината на криволинискиот триголник $A_1B_1C_1$ е половина од плоштината на триаголникот ABC.

I-3. Да се определи најголемиот природен број помал од бројот

$$\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}}}_{1987 \text{ корени}} + \underbrace{\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6}}}}_{1987 \text{ корени}}$$

знаејќи дека $\sqrt[3]{6} > 1{,}6$.

I-4. Даден е ромб $ABCD$. Пресечната точка на симетралите на аглите $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle BDC$ лежи на една негова страна. Да се одредат аглите на ромбот.

II-1. Даден е трапез $ABCD$ со основи AB и CD. Дијагоналите на трапезот се сечат во точката T. Ако P_1 и P_2 се плоштините на триаголниците ABT и CDT соодветно, а P е плоштината на трапезот да се докаже дека

$$P = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2.$$

II-2. Да се докаже дека ако

$$\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y} = 0$$

тогаш и

$$\frac{(y-z)^2}{x} + \frac{y}{(z-x)^2} + \frac{z}{(x-y)^2} = 0.$$

II-3. Не постои полином $P(x)$ со целобројни коефициенти таков што $P(7) = 11$ и $P(11) = 13$. Докажи!

II-4. Даден е квадрат $ABCD$ и точка P во внатрешноста на квадратто така што

$$\overline{AP} : \overline{BP} : \overline{CP} = 1 : 2 : 3$$

Да се пресмета аголот $\sphericalangle APB$!

III-1. Да се најде односот $k = \frac{M}{B}$, каде M е плоштината на обвивката на конус, а B е плоштината на неговиот базис, ако се знае дека волуменот на конусот е два пати поголем од волуменот на впишаната топка во него.

III-2. Да се докаже дека не постои полином $P(x)$ со целобројни коефициенти таков што $P(a) = b$, $P(b) = c$, $P(c) = a$, каде a, b и c се три различни цели броеви.

III-3. Нека P е множеството реални броеви, $f: R \to R$ функција за која се исполнети следниве два услови:

а) За било кои 2 реални броја x и y

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

б) Постои единствен реален број x_0 таков што

$$f(x_0) = 1987$$

Да се докаже: ако за два реални броеви x и y важи $f(x) = f(y)$ тогаш мора $x = y$ (т. е. функцијата f е инјективна).

III-4. Да се докаже дека секое множество од шест различни едноцифрени броеви содржи 2 подмножества без заеднички елементи, такви што збирот на елементите на првото подмножество е еднаков со збирот на елементите од второто подмножество.

IV-1. Да се докаже дека за секој природен број n, $n \geq 6$, квадрат може да се раздели на n помали квадрати (така што плоштината на квадратот е збир од плоштините на помалите квадрати), но не може да се раздели на 5 нпомали квадрати.

IV-2. Неколку луѓе треба да ископаат еден канал. Ако започнат со работа истовремено, тогаш ќе го ископаат каналот за 24 часа. Меѓутоа тие на работа доаѓале еден по друг во еднакви временски интервали, а потоа секој работел до завршувањето на работата. Колку време работел работникот кој прв дошол на работа ако тој работел 5 пати подолго од работникот кој последен дошол на работа?

IV-3 ≡ **III-3.**
IV-4 ≡ **III-4.**

Rešenija

I-3. Znaejći deka $\sqrt{6} > 2{,}4$ i $\sqrt[3]{6} > 1{,}6$ dobivame

$$4 < \sqrt{6} + \sqrt[3]{6} < \sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}} + \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6}}}$$

Od druga strana

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}} < \sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+3}}} = 3$$

i

$$\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6}}} < \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6+2}}} = 2$$

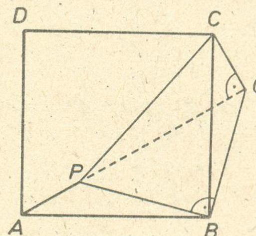
odnosno

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}} + \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6}}} < 5$$

Znači, baraniot broj e 4.

II-4. Triagolnikot $\triangle ABP$ go rotirame okolu temeto B se dodeka temeto A ne se poklopi so temeto C. Neka so Q ja označime novata položba na temeto P po rotacijata. Bidejći $\sphericalangle QBC = \sphericalangle PBA$ sleduva deka $\sphericalangle QBP = 90°$. Zaradi ova, bidejći $\overline{BP} = \overline{BQ}$ imame $\sphericalangle PQB = 45°$ i

$$\overline{PQ}^2 = 2\,\overline{BP}^2.$$



Od uslovot na zadačata imame $\overline{BP} = 2\,\overline{AP}$, $\overline{CP} = 3\,\overline{AP}$ pa ottuka i od prethodnoto ravenstvo dobivame:

$$\overline{PQ}^2 + \overline{CQ}^2 = = 8\overline{AP}^2 + \overline{AP}^2 = \overline{CP}^2.$$

Bidejći za triagolnite $\triangle CQP$ važi teoremata na Pitagora $\sphericalangle CQP = 90°$. Konečno:

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle CQB = \sphericalangle PQB + + \sphericalangle CQP = 45° + 90° = 135°.$$

III-3. Spored prviot uslov na zadačata imame

$$f(x_0) = f(x_0 + 0) = f(x_0) f(0)$$

od kade sleduva $f(0) = 1$. Ottuka

$$1 = f(x + (-x)) = f(x) f(-x)$$

od kade sleduva deka za sekoe x, $f(x) \neq 0$ i $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.

Sega neka $f(x) = f(y)$, odnosno $f(x)/f(y) = 1$. Od ova zaradi prethodniot zaključok dobivame

$$f(x) f(-y) = 1$$

$$f(x-y) = 1$$

$$f(x_0) f(x-y) = 1987$$

$$f(x_0 + x - y) = 1987.$$

Bidejći postoi edinstven broj x taka što $f(x_0) = 1987$, dobivame $x_0 + x - y = x$ odnosno $x = y$.

IV-2. Neka so z go označime brojot na site rabotnici, x brojot na časovi što gi pominal na rabota rabotnikot što posleden došol na rabota i so y brojot na časovite na vremenskiot interval na doađanje pomeđu dva rabotnika koi eden po drug došle na rabota. Togaš za kopanje na kanalot se potrošeni skupno

$$x + (x+y) + (x+2y) + \ldots + [x + (z-1)y]$$

rabotni časa, što po uslov na zadačata se ednakvi na $24z$, t.e.

$$x + (x+y) + (x+2y) + \ldots + [x + (z-1)y] = 24z.$$

So obzir na toa deka suma na niza od prvite $z-1$ prirodni broevi e $z(z-1)/2$ se dobiva

$$xz + yz(z-1)/2 = 24z$$

t. e.

$$2x + y(z-1) = 48. \qquad (1)$$

Znaejći deka prviot rabotnik pominal na rabota pet pati podolgo vreme od posledniot, mora da važi i ravenstvoto

$$x + y(z-1) = 5x. \qquad (2)$$

Od ravenstvata (1) i (2) se dobiva deka

$$6x = 48 \text{ t. e. } x = 8$$

Spored toa, kanalet e kopan 40 časa.

Кузман Ацыевски
Скопје

Savezno natjecanje iz fizike (1987)

Rješenja zadataka (v. br. 1/152, str. 32—35)

A-2. Oba tega ne smeju biti u rukama istovremeno. Najoptimalnije je da ih čovek naizmenično odbacuje tako dok jedan leti gore, drugi se u ruci ravnomerno usporava, a kad prvi pada drugi se u ruci ravnomerno ubrzava. Sila usporavanja odnosno sila ubrzavanja jednake su $G_1 = 100$ N, a sila na most iznosi

$$G_1 + G_2 + G_2 = 900 \text{ N}.$$

A-3. Ekvivalentni sistem:

$$mg' - N = ma \qquad (1)$$

$$N \cdot R - T \cdot R = \frac{1}{2} M R^2 \cdot \omega \qquad (2)$$

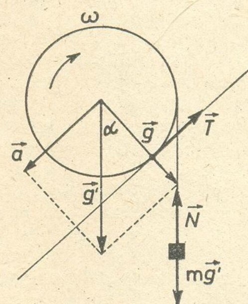
$$M \cdot a + N \cdot \frac{a}{g'} - T = 0 \qquad (3)$$

$$a = \omega R \qquad (4)$$

$$g' = \sqrt{a^2 + g^2} \qquad (5)$$

a) Iz (1) do (5) izlazi

$$\frac{m}{M} = \frac{3}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{a^2+g^2}}{(\sqrt{a^2+g^2} - a)^2};$$



b) pritisak valjka na podlogu je

$$P = Mg + N \cos \alpha = Mg + N \cdot \frac{g}{g'},$$

a sila trenja

$$T = Ma + N \cdot \frac{a}{g'}.$$

Iz uvjeta $T \leqq \mu P$ izlazi

$$\mu \geqq \frac{a\left(M + \frac{N}{g'}\right)}{g\left(M + \frac{N}{g'}\right)} = \frac{a}{g}.$$

A-4. a) V' je brzina kuglice mase M prije sudara, V je brzina iste kuglice poslije sudara, v je brzina kuglice mase m poslije sudara.

$$\left.\begin{aligned} M V' &= M V + m v \\ \frac{1}{2} M V'^2 &= \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m v^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{2V'}{1 + \frac{m}{M}},$$

$$h' = \frac{v^2}{2g} = \frac{4V'^2}{2g\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2} =$$

$$= \frac{4h}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2} \leqq 4h.$$

b) v' je brzina kuglice mase m prije sudara, v je brzina iste kuglice poslije sudara, u je brzina kuglice mase μ poslije sudara.

$$\left.\begin{aligned} m v' &= m v + m u \\ \frac{1}{2} m v'^2 &= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \mu u^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \frac{2 v'}{1 + \frac{\mu}{m}},$$

$$W_\mu = \frac{1}{2} \mu u^2 = \frac{1}{2} \mu \cdot \frac{v'^2}{\left(1 + \frac{\mu}{m}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \mu \cdot V'^2 \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\mu}{m} + \frac{m}{M} + \frac{\mu}{M}\right)^2}.$$

$\frac{\mu}{m} + \frac{m}{M}$ je minimalno za $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}\left(\frac{\mu}{m} + \frac{m}{M}\right) = 0$, ili

$-\frac{\mu}{m^2} + \frac{1}{M} = 0$ odakle

$$m = \sqrt{\mu M}.$$

B-1.

$$\vec{a} = -\vec{A}\,\omega^2 \sin \omega t, \ \omega = 2\pi f$$

$$F_x = m \cdot a_x = \frac{m A \omega^2}{\sqrt{2}} \cdot \sin \omega t$$

$$N - m g = m \cdot a_y = -\frac{m A \omega^2}{\sqrt{2}} \cdot \sin \omega t.$$

Disk klizi po daski pri

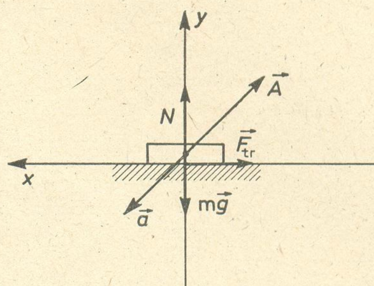
$$|F_x| \geqslant |F_{tr}|.$$

Granični slučaj:

$$|F_x| = |F_{tr}|$$

$$\frac{m A \omega^2}{\sqrt{2}} |\sin \omega t| = \mu \cdot |N| =$$

$$= \mu \cdot \left|m g - \frac{m A \omega^2}{\sqrt{2}} \sin \omega t\right|$$



$$|\sin \omega t| = \mu \cdot \left|\frac{g\sqrt{2}}{A\omega^2} - \sin \omega t\right|.$$

I. slučaj: $\sin \omega t < 0$

$$-\sin \omega t = \mu\left(\frac{g\sqrt{2}}{A\omega^2} - \sin \omega t\right),$$

$$A = \frac{\mu}{\mu - 1} \cdot \frac{g\sqrt{2}}{A\omega^2} \cdot \frac{1}{\sin \omega t}$$

za $\sin \omega t = -1$,

$$A = A_{\min} = \frac{\mu}{\mu - 1} \cdot \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}.$$

II. slučaj: $0 < \sin \omega t \leqq \frac{g\sqrt{2}}{A\omega^2}$

$$\sin \omega t = \mu \cdot \frac{g\sqrt{2}}{A\omega^2} - \mu \sin \omega t$$

$$A = \frac{\mu}{\mu + 1} \cdot \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2} \cdot \frac{1}{\sin \omega t}.$$

Za $\sin \omega t = \frac{g\sqrt{2}}{A\omega^2} < 1 \Rightarrow \mu = \mu + 1$ nema smisla;

$$\sin \omega t = 1 < \frac{g\sqrt{2}}{A\omega^2} \Leftarrow A = A_{\min} =$$

$$= \frac{\mu}{\mu + 1} \cdot \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}.$$

III. slučaj:

$$\sin \omega t > \frac{g\sqrt{2}}{A\omega^2},$$

$$\sin \omega t = \mu\left(\sin \omega t - \frac{g\sqrt{2}}{A\omega^2}\right),$$

$$A = \frac{\mu}{\mu - 1} \cdot \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2} \cdot \frac{1}{\sin \omega t}.$$

Za $\sin \omega t = 1$, $A_{\min} = \frac{\mu}{\mu - 1} \cdot \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}$ (kao u I).

Ana Smontara

Riješili zadatke iz br. 4/151

(Broj u zagradi označuje razred-godište srednje škole; redni broj riješenog zadatka »skraćen« je na desetice i jedinice).

Iz matematike: *Andrijić Silvija* (1), Sarajevo, 65, 73, 74; *Anđić Dragica* (1), Foča, 65—67, 73, 78; *Anđić Ljiljana* (3), Foča, 65—70, 73, 75, 76, 78; *Arslanagić Zaim* (1), Trebinje, sve; *Babić Živomir* (3), Banja luka, sve osim 77; *Bašić Dejan* (3), Trebinje, sve osim 66; *Begić Emir* (3), Sarajevo, 65, 67—70, 73, 75; *Begović Nenad* (3), Smed. Palanka, 65, 69, 72, 73, 75—78; *Borovina Nihad* (2), Foča, sve osim 68; *Čečo Naida* (3), Foča, 65—70, 73, 75, 76, 78; *Čevizović Dalibor* (2), Podr. Slatina, 70, 73, 76; *Davidović Goran* (2), Tuzla, 65, 70, 72—76, 78; *Dedović Edina* (3), Foča, 65, 67, 69—76, 78; *Dejanović Alen* (2), Prijedor, 65, 67, 69, 70, 73, 75, 76, 78; *Delić Dejan* (4), Novi Sad, 65—74, 76, 78; *Dobnikar Jure* (1), Maribor, 74, 75, 77, 78; *Drinić Evelin* (1), Banja Luka, 65, 69, 73, 75, 78; *Đurković Zvjezdan* (2), Ugljevik, 65, 67, 70; *Filipović Davorka* (3), Beli Manastir, 65, 66, 70, 73, 75, 76, 78; *Franjić Krešimir* (1), Sarajevo, 65—70, 73—76, 78; *Gajić Bojana* (2), Sarajevo, 65—67, 69, 70, 73, 78; *Gudelj Ivan* (2), Sinj, 67, 69, 70, 73, 76; *Guvo Miroslav* (3), Sinj, 65, 69, 74, 76, 78; *Huskanović Almir* (3), Tešanj, 65—73, 75, 76; *Ilišević Dijana* (1), Beli Manastir, sve; *Ivanović Stanislav* (2), Foča, sve; *Janjić Tatjana* (3), Foča, 65—70, 73, 75, 76, 78; *Javor Igor* (3), Prijedor, 65—67, 69, 70, 73—75; *Jerman Marjan* (2), Trbovlje, 65, 67, 69, 70, 73; *Jocić Aleksandar* (3), Foča, sve osim 77; *Jovanović Biljana* (3), Knjaževac, 65, 70—73, 76, 78; *Kabaši Gazmend* (3), Serbica, 65, 67, 69, 74, 76, 77; *Kliškinić Zlatko* (1), Prijedor, 65, 74—76; *Kovačević Svetislav* (2), Foča, 65—67, 70—78; *Kukovičić Suzana* (3), Titovo Velenje, 66, 69—73, 75—78; *Kunovac Saudin* (3), Foča, 67, 70—73, 76; *Laci Vesna* (3), Varaždin, 65—70, 73—76, 78; *Lasić Branimir* (1), Lištica, 66, 74, 76, 78; *Marić Viktor* (3), Modriča, 65, 66, 69—72, 74, 76, 78; *Mašić Vlastimir* (1), Foča, 65—67, 69—73, 75, 78; *Medan Ninoslav* (2), Tuzla, 65, 67, 68, 70, 71, 73—78; *Medvid Boris* (2), Sinj, sve osim 77; *Mićić Aleksandar* (2), Banjaluka, 65—67, 69—76, 78; *Mijatović Anđa* (OŠ), Kneževo, 65, 69, 73, 75; *Miletić Predrag* (3), Foča, 65—67, 69, 70, 73, 75—78; *Miljković Tatjana* (1), Banjaluka, 65, 67, 73; *Mitić Ljiljana* (1), Pančevo, 65, 69, 73, 74, 76, 78; *Mitreski Slobodan* (2), Pančevo, 65, 69—76, 78; *Mulahasanović Enes* (2), Foča, 65, 67, 70; *Muratović Midhat* (2), Tuzla, 65, 68—70, 73; *Nikolin Bojana* (2), Pančevo, 70, 73, 76, 78; *Omerdić Emir* (2), Tuzla, 65, 67—70, 72—78; *Ostović Anđelko* (2), Foča, 65—67, 69—76; *Paar Dalibor* (3), Zagreb, 65, 67—71, 74—76, 78; *Pešić Marina* (3), Zrenjanin, 65—69, 71—76, 78; *Pokrajac Dragoljub* (2), sve sem 71; *Poleš Damir* (3), Sinj, 65, 69—75, 78; *Poljak Ljiljana* (2), Sinj, sve osim 77; *Popov Marjan* (4), Kavadarci, 66, 68—75, 78; *Radivojević Nebojša* (3), Foča, 65, 67, 69, 70, 73, 76, 78; *Radović Zdravko* (2), Foča, 65, 67, 69—74, 78; *Ramadani Ilber* (2), Priština, sve; *Rašković Srđan* (OŠ), Sinj, 65, 66, 73—76; *Slačala Dejan* (1), Prijedor, 65, 69, 70, 73—76, 78; *Sokolović Jovan* (2), Pirot, 65—75, 77; *Stojanović Radenka* (4), Foča, 65, 67, 69, 70, 73, 74; *Subašić Emir* (3), Zenica, 65, 69—76, 78; *Subašić Mirsad* (1), Zenica, 65, 70, 73—76; *Šekara Saša* (3), Pale, 65—71, 73, 75, 76, 78; *Šekara Siniša* (3), Pale, 65—71, 73, 75, 76, 78; *Šelmić Rastko* (2), Beograd, 65, 67, 68, 70—73, 78; *Škrtić Ma io* (2), Karlovac, 65—67, 69, 70, 73—76, 78; *Tabučić Dževad* (2), Foča, 65, 66, 68—73, 75, 76, 78; *Tambača Josip* (2), Šibenik, 65—67, 69—76, 78; *Tošić Stevan* (2), Podr. Slatina, 65, 69, 73, 76; *Tužinski Dalibor* (2), Slav. Požega, sve osim 77; *Ugrin Sretan* (3), Sinj, 68, 69, 72, 73, 75, 76, 78; *Vilibić Ivica* (3), Split, 66, 67, 69—71, 73, 75, 77, 78; *Vlajčević Robert* (2), Sinj, 65, 69, 73, 74, 78; *Vučković Vladan* (3), Niš, 65, 67, 69—73, 75—78; *Алексић Вера* (2), Ср. Митровица, 74, 76, 78; *Анђелковић Александар* (2), Топола, 69, 73, 78; *Атанасов Љупче* (ОШ), Кавадарци, 65, 67, 69, 70; *Атанасов Ристе* (3), Кавадарци, 65, 67—75, 78; *Гацовски Зоран* (2), Кавадарци, 65, 73, 78; *Манић Драган* (2), Пирот, све сем 77; *Марић Драган* (3), Крушевац, 65, 66, 68—75, 78; *Маринова Весна* (3), Битола, све сем 74; *Милићевић Јасмина* (2), Крушевац, 65, 67, 69—71, 73—75, 78; *Нинески Рубинче* (1), Скопје, 65, 67, 75, 78; *Новаковић Иван* (2), Велика Плана, 65, 70, 73, 78; *Обрадовић Милан* (3), Нови Сад, 65, 66, 68—76, 78; *Петровић Владимир* (4), Ниш, 65, 67—69, 71, 77; *Петровић Синиша* (3), Вршац, 69—76, 78; *Трајковић Мирослав* (2), Ниш, 65—67, 69—72, 78.

b) Iz fizike: *Babić Jovan* (2), Ugljevik, 26, 32; *Babić Živomir* (3), Banja Luka, 26, 27, 29, 31, 32; *Dejanović Alen* (2), Prijedor, 31, 32; *Delić Dejan* (4), Novi Sad, 26, 27, 29, 31, 32; *Devčić Željko* (3), Slav. Požega, 26, 27, 29, 31, 32; *Dobnikar Jure* (1), Maribor, 27, 32; *Gulen Robert* (3), Novska, 27, 31, 32; *Guzijan Miloš* (4), Zrenjanin, sve sem 30; *Kabaši Gazmend* (3), Serbica, 27—29, 31, 32; *Laci Vesna* (3), Varaždin, 29, 30, 32; *Medvid Boris* (2), Sinj, 27, 28, 31, 32; *Mičić Nenad* (3), Banja Luka, 27, 29, 32; *Miletić Predrag* (3), Foča, 27, 29—32; *Mladenović Saša* (3), Split, 27, 29, 32; *Nikolić Verica* (2), Futog, 27, 29, 31, 32; *Obradović Milan* (3), Novi Sad, 27—29, 31, 32; *Omerdić Emir* (2), Tuzla, 27, 29, 31, 32; *Paar Dalibor* (3), Zagreb, 27, 31, 32; *Pokrajac Dragoljub* (2), Niš, 27—29, 31, 32; *Poljak Ljiljana* (2), Sinj, 27, 29, 31, 32; *Ramadani Ilber* (2), Priština, sve osim 27; *Sokolović Jovan* (2), Pirot, 26, 27, 29, 31, 32; *Šekara Saša* (3), Pale, 27,

Rezultati nagradnog natječaja br. 104

Zadatak je glasio:

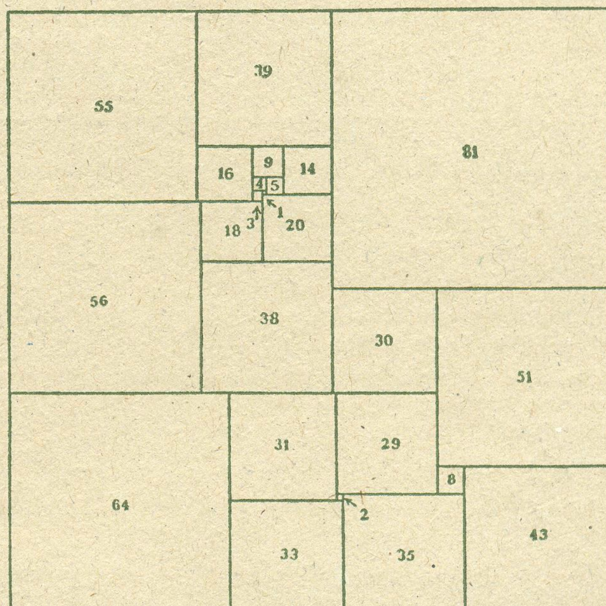
Od 24 različita kvadrata, kojima su stranice:

1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 14, 16, 18, 20, 29

30, 31, 33, 35, 38, 39, 43, 51, 55, 56, 64, 81

sastaviti kvadrat!

Rješenje:

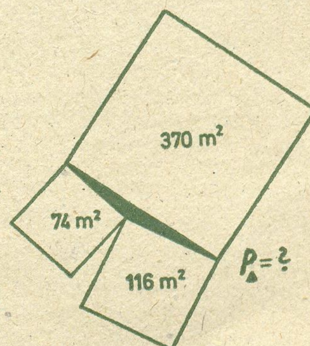


Taj zadatak je zapravo obrnut problemu: Kvadrat podijeliti (rastaviti) na izvjestan broj manjih kvadrata tako da među tim manjim kvadratima nema dva jednaka! Rješenje tog problema (nazvanog »kvadriranje« kvadrata, squaring the square, квадрирование квадрата) prvi je objavio *R. Sprague* (1939) sa 55 manjih kvadrata. God. 1948. je *T. G. Willcoks* smanjio ovaj broj na 24. To je dosadašnji »rekord«. [Opširnije u knjizi *M. Gardner*: Mathematical Puzzles and Diversions (ruski prijevod: Математические головоломки и развлечения) i u knjižici *И. М. Яглом*: Как разрезат квадрат?]

Primljeno je 15 ispravnih odgovora. Raznim knjigama nagrađeni su: 1. *Arslanagić Zaim* (1), Trebinje; 2. *Dejanović Alen* (2), Ljubija; 3. *Gulan Robert* (3), Novska, 4. *Laci Vesna* (3), Varaždin; 5. *Marić Dragan* (3), Kruševac; 6. *Milašinović Miloš* (4), Beograd; 7. *Škrtić Mario* (2), Karlovac; 8. *Tužinski Dalibor* (2), Slav. Požega; 9. *Urumov Andrej* (OU), Skopje; 10. *Vilibić Ivica* (3), Split.

Nagradni natječaj br. 106

Kolika je površina trokuta kojemu su mjerni brojevi stranica $\sqrt{370}$, $\sqrt{74}$, $\sqrt{116}$? Izračunati: bez Heronove formule, bez trigonometrije, bez tablica, bez »minikompjutera«!



(Stilizirani problem *Sama Loyda* i *Lewisa Carrolla.*)

Odgovore (rješenja) poslati do 10. 3. 1988. Na kuverti napisati NN 106. Nagrade: 10 knjiga, Rezultati u br. 4/155.

29, 31, 32; *Šekara Siniša* (3), Pale, 27, 29, 31, 32; *Škrtić Mario* (2), Karlovac, 26, 29, 31, 32; *Tambača Josip* (2), Šibenik, 26, 27, 30—32; *Tošić Stevan* (2), Podr. Slatina, 26, 32; *Tužinski Dalibor* (2), Slav. Požega, sve; *Vilibić Ivica* (3), Split, 27, 31, 32; *Vučković Vladan* (3), Niš, 26, 27, 31, 32; *Манић Драган* (2), Пирот, 27, 29—32; *Марић Драган* (3), Крушевац, 27—29, 31, 32; *Маринова Весна* (3), Битола, све осим 30; *Новаковић Иван* (2), Велика Плана, 27, 32; *Петровић Синиша* (3), Вршац, 26, 27, 29, 31, 32.

Iz matematike za ekonomsko usmjerenje: *Alekšić Vera* (2), Sr. Mitrovica, 74; *Atanasov Riste* (3), Kavadarci, 75; *Laci Vesna* (3), Varaždin, 71, 72, 74, 75; *Parezanović Radomir* (2), Nikšić, 71, 72, 74; *Pokrajac Dragoljub* (2), Niš, 71, 72, 74; *Ramadani Ilber* (2), Priština, sve osim 73; *Radović Zdravko* (2), Foča, 72, 74; *Šćulac Marija* (2), Slav. Požega, 72; *Takač Silvija* (3), Beli Manastir, 71, 72, 74, 75.

Molimo pretplatnike (koji to još nisu učinili) da što prije doznače pretplatu za 1987/88. šk. godinu — jer je izlaženje lista ometeno, dapače ugroženo nastalom situacijom!

SVIM SURADNICIMA

Svi rukopisi (po mogućnosti i učenička rješenja) treba da budu napisani pisaćim strojem, a crteži izrađeni tušem na posebnom čvrstom papiru ili paus-papiru. Rukopisi se ne vraćaju.

RJEŠAVATELJIMA ZADATAKA

U rješenjima treba uvijek napisati i sam zadatak s rednim brojem, ne pozivajući se na broj i datum »Mat.-fiz. lista« u kojem je bio postavljen. Svako rješenje zadatka pisati na posebnom papiru (četvrtini ili pola arka) i to samo na jednoj strani papira. Uz svako rješenje na vrhu papira treba potpuno ispisati tekst zadatka, i to u *istoj terminologiji* kao i rješenje. Svako rješenje treba čitljivo potpisati (ime i prezime), naznačiti razred, školu i mjesto.

Nečitljiva i neuredna rješenja neće se uopće uzeti u obzir.

Rješenja zadataka C) donosimo samo za učenike ekonomskih usmjerenja. Ona ne ulaze u »godišnji konkurs«.
